摩擦のない接触下のトポロジー最適化における Lagrange 双対性について
On Lagrange Duality for Topology Optimization under Frictionless Contact

○ 寒野 善博 [*1]
Yoshihiro Kanno

[*1] 東京大学 数理・情報教育研究センター，教授，博士（工学）
Mathematics and Informatics Center, The University of Tokyo, Professor, Dr. Eng.

キーワード：トポロジー最適化；片側接触；相補性制約；Lagrange 双対性
Keywords: Topology optimization; unilateral contact; complementarity constraint; Lagrange duality.

1. はじめに

構造最適化の研究分野において，剛体との摩擦なしの接触を伴う弾性構造物の最適設計問題は，古くから研究が行われてきた基本的な問題の一つである [7,8,11,12]．その初期の頃からの成果は，Hilding *et al.* [9] にまとめられている．本稿では，微小変形の仮定をおいて，構造物の静的な剛性の最大化問題における Lagrange 双対性の有用性について考察する．

静的な剛性の最大化問題では，多くの場合，コンプライアンス（柔性の指標）を釣合い状態において構造物に生じる変位や支点反力の関数として定め，これを最小化する．このため，最適設計問題の定式化としては，釣合い状態を記述する支配方程式を制約にすることが自然に考えられる．いま，微小変形と線形弾性の仮定の下では，摩擦なしの接触問題は線形相補性問題として定式化できる [15,20]．このため，摩擦なしの接触の下での剛性の最大化問題は，相補性制約付き数理計画問題 (mathematical programming with complementarity constraints, MPCC) として定式化することが可能である [6,18,19]．しかし，この MPCC としての定式化は，取り扱いが容易ではない．というのも，MPCC の任意の実行可能解では，標準的な制約想定が成り立たない [14]．このため，MPCC には，通常の非線形計画問題とは異なる特別な取り扱いが必要である．

また，MPCC 以外の定式化として，Petersson and Patriksson [17] は，設計変数である有限要素の密度を定式化から消去することで，目的関数を釣合い状態における節点変位のみで表すことを提案している．しかし，接触問題の釣合い状態における節点変位は，一般に，設計変数に関して微分可能ではない．このため，通常の非線形計画の解法ではなく，劣勾配法などを用いる必要がある [17]．

以上であげた定式化と比べて，もし通常の非線形計画の解法が適用できるような定式化ができれば，その取り扱いの容易さから有用である．本稿では，剛性最大化問題を取り上げ，Lagrange 双対性を用いることでそのような定式化が可能であることを示す．

2. 問題設定

有限要素に離散化された連続体を考える．その要素数を m で表し，節点変位の自由度を n で表す．また，節点変位ベクトルを $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ で表し，節点外力ベクトルを $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ で表す．この構造物は，空間内に位置が固定された剛体の表面と，摩擦なしに接触するものと仮定する．接触候補である節点の数を c で表し，節点 j $(j = 1,\dots,c)$ と剛体表面との距離（初期ギャップ）を $g_j\ (\geq 0)$ とおく．このとき，構造物が剛体内にめり込まないという条件（非貫入条件）は

$$\boldsymbol{g} - C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$$

の形で書ける．ただし，C_{n} は定行列であり，$\boldsymbol{g} = (g_j)$ は定ベクトルである．

次に，有限要素 e $(e = 1,\dots,m)$ の密度を $\rho_e \in [0,1]$ で表し，対応する剛性行列を $K(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ で表す．ただし，SIMP (solid isotropic material with penalization) 法 [1] を用いて剛性行列を構成することを想定している．このとき，コンプライアンスは全ポテンシャルエネルギーに -2 を乗じた関数の最大値として定められる：

$$\pi(\boldsymbol{\rho}) = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n} \{2\boldsymbol{p}^{\top}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{\top}K(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{u} \mid C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{g}\}. \tag{1}$$

日本建築学会情報システム技術委員会
第42回情報･システム･利用･技術シンポジウム論文集，106-109，2019年12月，東京
Proceedings of the 42nd Symposium on Computer Technology of Information，
Systems and Applications，AIJ，106-109，Dec.，2019，Tokyo

構造最適化の文献では，しばしば，コンプライアンスは外力仕事として定められている．しかし，構造物のいくつかの節点に（0 ではない）強制変位が課されている場合には，構造物の柔性の指標として外力仕事は適切ではない[16]．そのような場合には，コンプライアンスは，全ポテンシャルエネルギーの最大値として定めるべきであることが知られている[13]．いま，接触問題の釣合い状態が 0 でない接触反力をもつならば，そのような節点は強制変位を課したのと同じ状態である．このため，一般に（$\boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{0}$ である場合には），接触を伴う構造物のコンプライアンスは外力仕事ではなく (1) で定めるべきである．

トポロジー最適化における正則化のために密度フィルター[2,3] を用いるとすると，$\boldsymbol{\rho}$ はフィルターを作用させる前の密度 $\boldsymbol{x} \in [0,1]^m$ を用いて

$$\boldsymbol{\rho} = H\boldsymbol{x}$$

の形で表される．ただし，H は定行列である．構造体積の上限値を v で表すと，トポロジー最適化問題は次のように定式化できる：

$$\begin{aligned}
&\underset{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{x}}{\text{Minimize}} && \pi(\boldsymbol{\rho}) && \text{(2a)}\\
&\text{subject to} && \boldsymbol{\rho} = H\boldsymbol{x}, && \text{(2b)}\\
& && \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{1}, && \text{(2c)}\\
& && \boldsymbol{1}^{\top}\boldsymbol{\rho} \le v. && \text{(2d)}
\end{aligned}$$

次の 3 節では，既往の形の定式化として，問題 (2) と等価な相補性制約付き数理計画問題を示す．これに対して，4 節では，Lagrange 双対性を用いることで，相補性制約を含まない等価な定式化を示す．

3. 相補性制約付き数理計画問題としての定式化

記号の簡単のために，$R \subseteq \mathbb{R}^m$ を

$$R = \{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{\rho} = H\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{1},\ \boldsymbol{1}^{\top}\boldsymbol{\rho} \le v\}$$

で定義する．そして，各 $\boldsymbol{\rho} \in R$ に対して，関数 $\Phi_{\boldsymbol{\rho}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^c \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} -2\boldsymbol{p}^{\top}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^{\top}K(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{u} & \text{if } 2(\boldsymbol{g} - C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u}) \ge -\boldsymbol{\lambda}, \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する．ここで，$\Phi_{\boldsymbol{\rho}}$ は閉真凸関数である．この $\Phi_{\boldsymbol{\rho}}$ を用いると，トポロジー最適化問題 (2) は

$$\inf_{\boldsymbol{\rho}\in R} \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n} -\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{0}) \tag{3}$$

と書ける．

いま，任意の $\boldsymbol{\rho} \in X$ に対して剛性行列 $K(\boldsymbol{\rho})$ は半正定置であることから，(3) の上限は凹な 2 次関数の最大化問題である．したがって，この上限が達成されるための必要十分条件は，KKT 条件

$$K(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} + C_{\mathrm{n}}^{\top}\boldsymbol{r}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{g} - C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{0}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{r} \le \boldsymbol{0}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{r}^{\top}(\boldsymbol{g} - C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u}) = 0 \tag{7}$$

を満たす $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^c$ が存在することである．このことから，問題 (3) は次のように書き直すことができる：

$$\begin{aligned}
&\underset{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}}{\text{Minimize}} && 2\boldsymbol{p}^{\top}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{\top}K(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{u}\\
&\text{subject to} && (4),\ (5),\ (6),\ (7),\\
& && \boldsymbol{\rho} \in R.
\end{aligned}$$

また，制約 (4) を用いると，目的関数を

$$\boldsymbol{p}^{\top}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{\top}C_{\mathrm{n}}^{\top}\boldsymbol{r}$$

と書き直すこともできる．いずれにしても，これらの定式化は，相補性制約 (7) を含むために特別な取り扱いを必要とする．これに対して，4 節では，相補性制約をもたない定式化を示す．

4. Lagrange 双対性を利用した定式化

関数 $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が条件 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q \mid f(\boldsymbol{x}) < +\infty\} \neq \emptyset$ を満たすことを仮定する．このとき，

$$f^*(\boldsymbol{s}^*) = \sup_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^q} \{\boldsymbol{s}^{\top}\boldsymbol{s} - f(\boldsymbol{s})\}$$

で定義される関数 $f^* : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ のことを，f の共役関数とよぶ．

任意の $\boldsymbol{\rho} \in R$ に対して，関数 $L_{\boldsymbol{\rho}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^c \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$L_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{\lambda}^*) = \sup_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^c} \{\boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{\lambda}^* - \Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{\lambda})\}$$

で定義する．この $L_{\boldsymbol{\rho}}$ は，最適化問題

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n} -\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{0})$$

の Lagrange 関数の役割を果たす．実際，$L_{\boldsymbol{\rho}}$ は条件

$$\inf_{\boldsymbol{\lambda}^*\in\mathbb{R}^c} L_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{\lambda}^*) = -\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{0}) \tag{8}$$

を満たしている．というのも，任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^c$ に対して

$$
\begin{aligned}
\inf_{\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^c} & \{-\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + L_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\lambda}^*)\} \\
&= -\sup_{\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^c} \{\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\lambda}^* - L_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\lambda}^*)\} \\
&= -\sup_{\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^c} \left\{\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\lambda}^* - \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^c} \{\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\lambda}^* - \Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\lambda})\}\right\} \\
&= -\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\lambda})
\end{aligned} \tag{9}
$$

が成り立つ（ただし，最後の等式は，閉真凸関数 $\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \cdot)$ の共役関数の共役関数は $\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \cdot)$ 自身である[5] ことを用いている）が，(9) で $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}$ とおくと (8) が得られるからである．

Lagrange 双対性理論[4,5] は，等式

$$
\sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} \inf_{\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^c} L_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\lambda}^*) = \inf_{\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^c} \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} L_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\lambda}^*)
$$

が成り立つことを保証する．したがって，トポロジー最適化問題 (3) は，次のようにも書き直せる：

$$
\inf_{(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}^*) \in R \times \mathbb{R}^c} \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} L_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\lambda}^*). \tag{10}
$$

さらにここで，等式

$$
\sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} L_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\lambda}^*) = \Phi^*_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{0}; \boldsymbol{\lambda}^*) \tag{11}
$$

が成り立つを示すことができる．というのも，任意の $\boldsymbol{u}^* \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^c$ に対して

$$
\begin{aligned}
\sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} & \{\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u}^* + L_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\lambda}^*)\} \\
&= \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} \left\{\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u}^* + \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^c} \{\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\lambda}^* - \Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\lambda})\}\right\} \\
&= \sup_{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^c} \{\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\lambda}^* - \Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\lambda})\} \\
&= \Phi^*_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}^*; \boldsymbol{\lambda}^*)
\end{aligned} \tag{12}
$$

が成り立つ（ただし，最後の等式は，共役関数の定義を用いた）が，(12) で $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{0}$ とおくと (11) が得られるからである．

(11) を (10) に代入すると，トポロジー最適化問題 (2) は結局

$$
\inf_{(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}^*) \in R \times \mathbb{R}^n} \Phi^*_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{0}; \boldsymbol{\lambda}^*) \tag{13}
$$

と書き直せることがわかる．なお，ここまでの議論は，凸最適化問題における標準的な双対性理論を適用しているものである．

最後に，問題 (13) の目的関数 $\Phi^*_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{0}; \boldsymbol{\lambda}^*)$ を陽に書き下す．共役関数の定義より

$$
\Phi^*_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}^*; \boldsymbol{\lambda}^*) = \sup_{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}} \{\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\lambda}^* - \Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\lambda})\}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\Phi^*_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{0}; \boldsymbol{\lambda}^*) &= \sup_{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}} \{\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\lambda}^* - \Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\lambda})\} \\
&= \sup_{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}} \{\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\lambda}^* + 2\boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^\top K(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{u} \mid 2(\boldsymbol{g} - C_{\mathrm{n}} \boldsymbol{u}) \ge -\boldsymbol{\lambda}\} \\
&= \sup_{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}} \{(2(\boldsymbol{g} - C_{\mathrm{n}} \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda})^\top \boldsymbol{\lambda}^* + (2C_{\mathrm{n}} \boldsymbol{u})^\top \boldsymbol{\lambda}^* \\
&\qquad + 2\boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^\top K(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{u} \mid 2(\boldsymbol{g} - C_{\mathrm{n}} \boldsymbol{u}) \ge -\boldsymbol{\lambda}\} - 2\boldsymbol{g}^\top \boldsymbol{\lambda}^* \\
&= \begin{cases}
\sup_{\boldsymbol{u}} \{2(\boldsymbol{p} + C_{\mathrm{n}}^\top \boldsymbol{\lambda}^*)^\top \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^\top K(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{u}\} & \\
\quad - 2\boldsymbol{g}^\top \boldsymbol{\lambda}^* & \text{if } \boldsymbol{\lambda}^* \le \boldsymbol{0} \\
+\infty & \text{otherwise}
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
\boldsymbol{u}^\top K(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{g}^\top \boldsymbol{\lambda}^* & \text{if } K(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} + C_{\mathrm{n}}^\top \boldsymbol{\lambda}^*, \\
 & \quad \boldsymbol{\lambda}^* \le \boldsymbol{0} \\
+\infty & \text{otherwise}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

が得られる．したがって，問題 (13) は，具体的には次のように書くことができる：

$$
\begin{aligned}
\underset{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}^*}{\text{Minimize}} \quad & \boldsymbol{u}^\top K(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{g}^\top \boldsymbol{\lambda}^* && (14a) \\
\text{subject to} \quad & K(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + C_{\mathrm{n}}^\top \boldsymbol{\lambda}^*, && (14b) \\
& \boldsymbol{\lambda}^* \le \boldsymbol{0}, && (14c) \\
& \boldsymbol{\rho} \in R. && (14d)
\end{aligned}
$$

問題 (14) は，相補性制約をもたないので，通常の非線形計画の枠組みで扱うことができる．なお，問題 (14) は，Lagrange 双対性を使って得られる定式化の一例である．文献[10] では，これと等価な，非線形 2 次錐計画問題としての定式化が示されている．

謝辞　本稿の一部は，JSPS 科研費 17K06633 の助成を受けたものである．

[参考文献]

1) M. P. Bendsøe, O. Sigmund: Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, **69**, 635–654 (1999).
2) B. Bourdin: Filters in topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, 2143–2158 (2001).

3) T. E. Bruns, D. A. Tortorelli: Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 3443–3459 (2001).
4) P. G. Ciarlet: *Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimisation*. Cambridge University Press, Cambridge (1989).
5) I. Ekeland, R. Témam: *Convex Analysis and Variational Problems*. North-Holland, Amsterdam (1976); SIAM, Philadelphia (1999).
6) D. Hilding: A heuristic smoothing procedure for avoiding local optima in optimization of structures subject to unilateral constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **20**, 29–36 (2000).
7) D. Hilding, A. Klarbring: Optimization of structures in frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **205–208**, 83–90 (2012).
8) D. Hilding, A. Klarbring, J.-S. Pang: Minimization of maximum unilateral force. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **177**, 215–234 (1999).
9) D. Hilding, A. Klarbring, J. Petersson: Optimization of structures in unilateral contact. *Applied Mechanics Reviews*, **52**, 139–160 (1999).
10) Y. Kanno: Exploiting Lagrange duality for topology optimization with frictionless unilateral contact. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, to appear. DOI:10.1007/s13160-019-00375-1
11) A. Klarbring, J. Petersson, M. Rönnqvist: Truss topology optimization including unilateral contact. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **87**, 1–31 (1995).
12) A. Klarbring, M. Rönnqvist: Nested approach to structural optimization in nonsmooth mechanics. *Structural Optimization*, **10**, 79–86 (1995).
13) A. Klarbring, N. Strömberg: A note on the min-max formulation of stiffness optimization including non-zero prescribed displacements. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **45**, 147–149 (2012).
14) Z.-Q. Luo, J.-S. Pang, D. Ralph: *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. Cambridge University Press, Cambridge (1996).
15) J. A. C. Martins, M. Raous (eds.): *Friction and Instabilities*. Springer-Verlag, Wien (2002).
16) F. Niu, S. Xu, G. Cheng: A general formulation of structural topology optimization for maximizing structural stiffness. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **43**, 561–572 (2011).
17) J. Petersson, M. Patriksson: Topology optimization of sheets in contact by a subgradient method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 1295–1321 (1997).
18) N. Strömberg, A. Klarbring: Topology optimization of structures in unilateral contact. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **41**, 57–64 (2010).
19) F. Tin-Loi: On the numerical solution of a class of unilateral contact structural optimization problems. *Structural Optimization*, **17**, 155–161 (1999).
20) P. Wriggers: *Computational Contact Mechanics (2nd ed.)*. Springer-Verlag, Berlin (2006).