

粒子群最適化法を用いた Auxetic Bending-Active Gridshell の形状設計法

Shape Design of Auxetic Bending-Active Gridshell using Particle Swarm Optimization

○堺 雄亮*¹, 大崎 純*²
Yusuke Sakai*¹ and Makoto Ohsaki*²

*1 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 博士後期課程 修士 (工学)

Graduate student, Department of Architecture and Architectural Engineering, Kyoto University, M. Eng.

*2 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授 博士 (工学)

Professor, Department of Architecture and Architectural Engineering, Kyoto University, Dr. Eng.

キーワード: オーゼティック構造; ベンディングアクティブ・グリッドシェル; 粒子群最適化; 離散微分幾何学

Keywords: Auxetic structure; bending-active gridshell; particle swarm optimization; discrete differential geometry

1. はじめに

オーゼティック構造は負のポアソン比を持ち、圧縮時には直交方向へ縮み、引張時には膨張する¹⁾。このような構造は、面外曲げにより正のガウス曲率をもつ曲面を生成するため²⁾、大変形した梁で構成される格子状曲面(ベンディングアクティブ・グリッドシェル)の設計に用いることができる。

本研究では、オーゼティック構造となるように部材を配置した初期格子状平面に面外変形を与えて生成される曲面をオーゼティック・ベンディングアクティブ・グリッドシェル(Auxetic Bending-Active Gridshell: ABAG)とよぶ。ABAGの設計に関する研究は、パラメトリック・スタディによる力学特性の基礎的な検討³⁾、構造ユニットのポアソン比と曲率の関係に基づき望ましい曲率をもつ曲面を生成する手法⁴⁾などがある。

ABAGは離散的な骨組構造であり、曲面の凹凸量を連続なパラメトリック表現ではなく離散量として計算することが有効である。本研究では、離散微分幾何学に基づく離散曲率^{5, 6)}をABAGの設計に関する最適化問題の定式化に導入する。最適化には、粒子群最適化(Particle Swarm Optimization: PSO)を用いる⁷⁾。数値例題で提案手法により最適化されたABAGについて考察する。

2. ABAGの設計

2.1. 初期格子状平板

面内変形に対して負のポアソン比を持つ構造は、周期的かつ非凸な構造ユニットを平面充填して生成される。ここでは、Figure 1(a), (b)に示す単純な2種類の構造ユニットを用いる。これらは、シェブロン・ロッド(青)とタイ・ロッド(赤)という2種類の部材で構成される。

部材間はヒンジを用いず、剛接合とする。

いま、 m 本のシェブロン・ロッドをもつABAGを考える。Figure 1に示すように、 θ_i ($i = 1, \dots, m$), w, d はそれぞれ、 x 軸と i 番目のシェブロン・ロッドの左端の要素との角度、各ユニットの x, y 方向のサイズを表す。ABAG全体の変形には、シェブロン・ロッドの曲げとねじりが大きく影響する。リエントラント・ハニカムの θ の正の方向は、部材番号 i の偶奇によりそれぞれ、時計回りと反時計回りとする。リエントラント・トライアングルに対しては、すべてのシェブロン・ロッドにおいて θ の正の方向は反時計回りである。

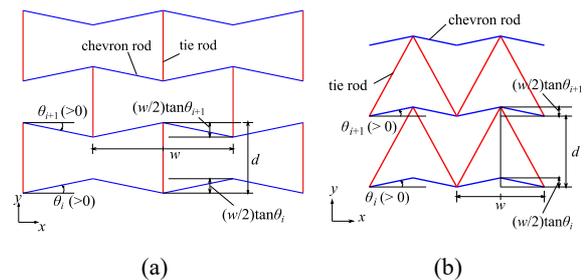


Figure 1. Auxetic structures; (a) reentrant honeycomb, (b) reentrant triangle.

2.2. リエントラント・ハニカムの面内変形に対するポアソン比と曲面のガウス曲率

曲げにより生成される曲面のガウス曲率の正負は、構造ユニットの面内変形に対するポアソン比の正負に依存する³⁾。Figure 2で、ポアソン比の正負の異なる初期格子状平板の面内変形および面外変形後の形状の比較を行う。各構造ユニットのサイズは $w = d = 0.75$ m とし、全部材の断面幅とせいはそれぞれ 0.01 m と 0.10 m である。ポ

アソソ比 $\nu > 0$ と $\nu < 0$ の初期格子状平板にはそれぞれ、 $\theta = -\pi/6$ と $\theta = \pi/6$ を与える。 $\nu \geq 0$ については i が奇数のとき $\theta = \pi/6$ とし、偶数のとき $\theta = -\pi/6$ とする。 $i = 1$ 番目と m 番目のシェブロン・ロッドとタイ・ロッドの接合部をすべて y 方向へ移動可能なローラー支持とする。すべての支持点に y 軸に平行な矢印の方向へ 0.30 m の強制変位を与える。

曲面を生成するために大変形解析を行う。はじめに、全部材に自重と同じ大きさの仮想荷重を鉛直上向きに与えて小さなたわみを生じさせ、分岐座屈に伴う数値的困難を回避する。次に、強制変位を与えて曲面を得る。仮想荷重は、強制変位の载荷の終了と同時に完全に除去される。Figure 2(a), (c), (e)はそれぞれ $\nu > 0$, $\nu \geq 0$, $\nu < 0$ の面内変形前(黒)と変形後(青)の形状を表す。それぞれのポアソン比に応じた変形形状が得られる。一方で、Figure 2(b), (d), (f)は面外変形後の形状であり、コントアは節点の z 座標を表す。 $\nu > 0$ のとき、曲面は鞍型の形状(ガウス曲率が負)となり、 $\nu \geq 0$ のとき、可展面に近い形状が得られる。また、ABAG ($\nu < 0$) は、ドーム型の曲面形状(ガウス曲率が正)を生成する。

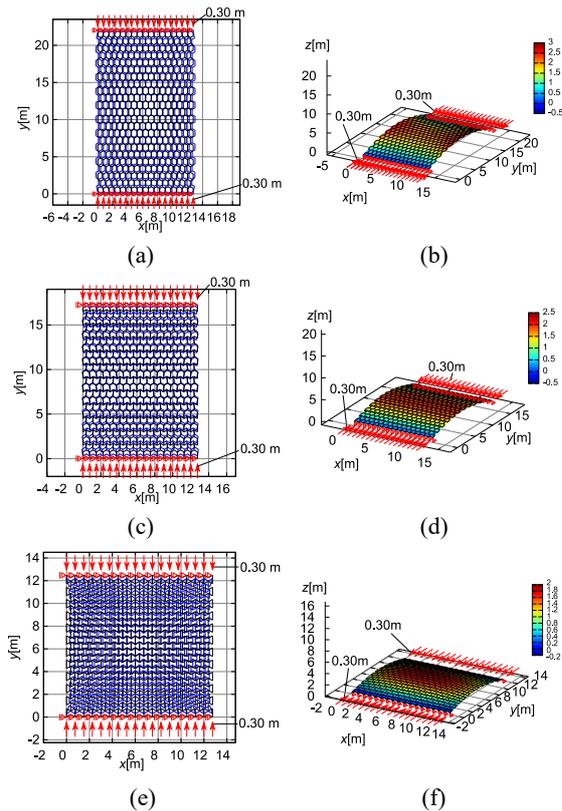


Figure 2. Comparison of relationships between Poisson's ratio ν and Gaussian curvature. Deformed (blue) and initial shapes (black) for 2-dimensional case. Deformed shapes from an initial flat grid for 3-dimensional case; (a) and (b) $\nu > 0$, (c) and (d) $\nu \geq 0$, (e) and (f) $\nu < 0$.

3. 離散ガウス曲率と離散平均曲率ベクトル

3.1. ABAG 曲面の離散化

離散曲率は、多面体の頂点の曲率であり、ABAGの部材上の節点に基づき分割した三角形からなる六角錐を用いて計算する。Figure 3は点 p 上の六角錐であり、円と三角形のマークはそれぞれ接合部上の節点と追加節点を表す。追加節点 q_2, q_3, q_5, q_6 の位置ベクトルは、これらの周囲の4節点の位置ベクトルの平均とする。六角錐は、境界を除くすべての節点に生成する。

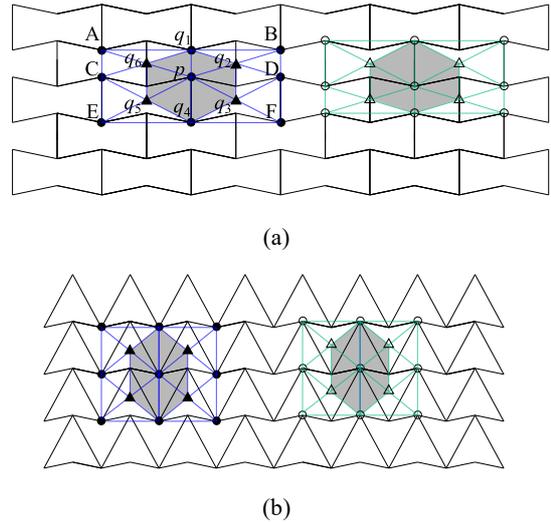


Figure 3. Hexagonal cone composed of 6 triangles at node on ABAG; (a) Reentrant honeycomb, (b) Reentrant triangle.

3.2. 離散ガウス曲率

離散ガウス曲率は、多面体上頂点の凹凸量の指標である。Figure 4(a)は、点 p, q_v ($v = 1, \dots, 6$) からなる六角錐であり、 \mathbf{e}_v は、点 p から q_v へのベクトルである。Figure 4(a)内の灰色領域は、6個の三角形の外心を結合して生成されるポロノイ領域を表す。ポロノイ領域の6頂点の外角の総和は、点 p 上の内角の総和に等しい。したがって、離散ガウス曲率は平坦面からの angle defect として次式で定式化される⁵⁾。

$$K_p = 2\pi - \sum_{v=1}^6 \phi_v = 2\pi - \sum_{v=1}^6 \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_{v+1}}{|\mathbf{e}_v| \cdot |\mathbf{e}_{v+1}|} \right). \quad (1)$$

式(1)より、 $K_p > 0$ で多面体は錐であり、 $K_p < 0$ では鞍型である。また、 $K_p = 0$ のとき、平面あるいは筒形が得られる。

3.3. 離散平均曲率ベクトル

点 p の離散平均曲率ベクトル $\mathbf{H}_p = (H_p^x, H_p^y, H_p^z)^T$ は、6個の三角形の面積勾配と反対方向を指すベクトルとして定義され、cotangent formula とよばれる次式で計算される⁶⁾。

$$\mathbf{H}_p = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^6 (\cot \alpha_{v1} + \cot \alpha_{v2}) (\mathbf{p} - \mathbf{q}_v). \quad (2)$$

Figure 4(b)に、式(2)を導出するためのベクトルと角度を示す。 $K_p > 0$ のとき、 $H_p^z > 0$ なら点 p において上向きに凸となり、 $H_p^z < 0$ なら下向きに凸となる。 離散平均曲率ベクトルの大きさが 0 のとき、 \mathbf{H}_p は消失する。

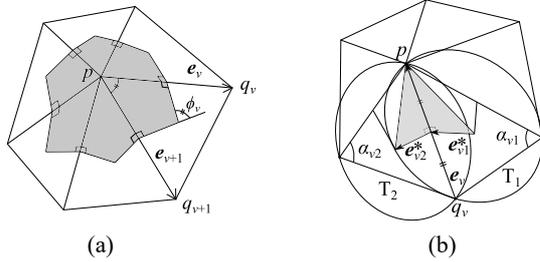


Figure 4. Hexagonal mesh on node p ; (a) Voronoi region (grey) for computing angle defect, (b) Vectors and angles used for cotangent formula.

4.最適化問題の定式化

4.1. シェブロン・ロッドの断面せい

シェブロン・ロッドの断面せいは、3次のバーンスタイン多項式を用いて定式化する。これにより、シェブロン・ロッドの各要素の断面せいは滑らかに変化する。さらに、バーンスタイン係数を設計変数とすれば、設計変数の数を低減できる。3次のバーンスタイン多項式 $B(u)$ は、バーンスタイン係数 β_l ($l=0, \dots, 3$) とパラメータ u ($0 \leq u \leq 1$) により、次のように書ける。

$$B(u) = \beta_0(1-u)^3 + 3\beta_1(1-u)^2u + 3\beta_2(1-u)u^2 + \beta_3u^3. \quad (3)$$

i 番目のシェブロン・ロッドの要素 k の断面せいを t_{ik} ($i=1, \dots, m; k=1, \dots, n_i$) と表す。ここで、 n_i は i 番目のシェブロン・ロッドの要素数であり、対称性を考慮して偶数とする。 β_l ($l=0, \dots, 3$) を i 番目のシェブロン・ロッドに関するバーンスタイン係数とする。また、パラメータ u を、要素番号 k で $u_k = (k-1)/(n_i-1)$ として離散化する。断面せい分布を対称にするため、バーンスタイン係数を $\beta_{3i} = \beta_{0i}$, $\beta_{2i} = \beta_{1i}$ と設定する。したがって、断面せい t_{ik} は、

$$t_{ik} = \beta_{0i} \left[(1-u_k)^3 + u_k^3 \right] + 3\beta_{1i} \left[(1-u_k)^2 u_k + (1-u_k) u_k^2 \right] \quad (4)$$

と書き直せる。

4.2. 離散ガウス曲率比の分布を設計するための最適化

設計者の望む離散ガウス曲率比の分布を持つ ABAG を生成するための最適化問題を定式化する。目標点 \hat{p}_j ($j=1, \dots, N$) と参照点 \hat{p}_{ref} の離散ガウス曲率を K_j , K_{ref} と表す。目的関数 F は、目標比 χ_j と K_{ref} に対する K_j の比の絶対値の誤差の最大値と定め、これを最小化する。離散平均曲率ベクトル \mathbf{H}_p の z 成分を非負とする条件を点 \hat{p}_j に与え、すべての \hat{p}_j の凸方向が鉛直上向きである曲面を生成する。

$\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$, $\boldsymbol{\beta}_0 = \{\beta_{01}, \dots, \beta_{0m}\}$, $\boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}\}$ を設計変数とし、最適化問題を以下のように定式化する。

$$\min. \quad F = \max_{1 \leq j \leq N} \left| \frac{K_j(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_1)}{K_{\text{ref}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_1)} - \chi_j \right| \quad (5a)$$

$$\text{subject to} \quad H_j^z(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_1) \geq 0, \quad (j=1, \dots, N) \quad (5b)$$

$$\boldsymbol{\theta}^L \leq \boldsymbol{\theta} \leq \boldsymbol{\theta}^U, \boldsymbol{\beta}_0^L \leq \boldsymbol{\beta}_0 \leq \boldsymbol{\beta}_0^U, \boldsymbol{\beta}_1^L \leq \boldsymbol{\beta}_1 \leq \boldsymbol{\beta}_1^U \quad (5c)$$

上添字 U, L は設計変数の上下限界を表す。目的関数 F は、複雑な非線形関数であり、最適化には PSO 法を用いる⁷⁾。PSO 法は多数の粒子(解)を多次元空間内で大域的に探索させて最適解を導く発見的手法であり、問題(5)のような感度解析が困難な最適化問題に有効である。

5. 数値例題

2種類の数値例題を示す。モデル1と2の ABAG をそれぞれ、リエントラント・ハニカムとリエントラント・トライアングルで構成する。部材の断面は、長方形とする。タイ・ロッドは断面せいと幅をそれぞれ、0.10 m と 0.01 m とする。シェブロン・ロッドは断面せいを式(4)で設計し、幅を 0.01 m で一定とする。シェブロン・ロッドの断面せいに関する設計変数の下限値を $\beta_0^L = \beta_1^L = 0.01$ m とすることで、断面せいの下限値は 0.01 m に定まる。同様に、上限値を $\beta_0^U = \beta_1^U = 0.30$ m とする。設計変数 $\boldsymbol{\theta}$ は、初期格子状平板のポアソン比を負に限定するため正值とし、その上限値を $5\pi/18$ とする。PSO 法について、詳細は省略するが、慣性パラメータを 0.5、粒子全体の最良位置へ移動しない粒子の割合を 0.5、各粒子固有の最良位置へ移動しない粒子の割合を 0.5 とする。粒子数は 300、ステップの上限値は 50 である。

PSO 法には Python の PSO 法ライブラリ pypswarm 0.6⁸⁾ を使用し、大変形解析には Abaqus Ver. 2018⁹⁾ を使用する。

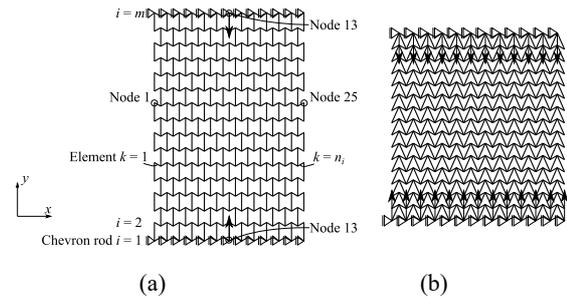


Figure 5. Initial flat grids with boundary conditions and forced displacements (arrow); (a) Model 1, (b) Model 2.

5.1. モデル1: リエントラント・ハニカム

モデル1の初期格子状平板は Figure 5(a) のように、 $n_i = 24$ 要素をもつ $m = 16$ 本のシェブロン・ロッドからなるリエントラント・ハニカムで構成される。1番目と m 番目のシェブロン・ロッドの外側の接合部は y 方向へ移動可能なローラー支持とする。大きさ 0.30 m の強制変位を、 Figure 5(a) の矢印の始点に与える。各構造ユニットのサイズは $w = 0.50$ m, $d = 0.75$ m とする。最適化の結果を Figure 6 に示す。 Figure 6(a) は、曲面上の点の離散ガウス曲率の

分布を表し、破線で囲まれた点が \hat{p}_j 、黒の円が点 \hat{p}_{ref} である。目標比は $\chi_j = 1.0$ と定める。最適解の初期格子状平板の x, y 方向のサイズはそれぞれ、6.0000 m と 9.3761 m である。Figure 6(b), (c), (d) はそれぞれ、 yz 平面、各要素の軸応力をコントラストで示した ABAG の変形形状、シェブロン・ロッドの断面せい分布である。Figure 7 にモデル 1 の目的関数の推移を示す。最終イテレーションで十分小さな値に収束していることがわかる。

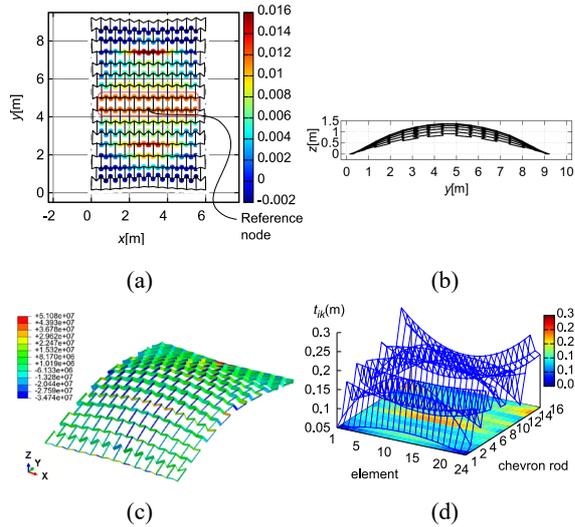


Figure 6. Results of Model 1; (a) Distribution of discrete Gaussian curvature, (b) yz -plane, (c) Curved surface, (d) Distribution of cross-sectional heights of chevron rods.

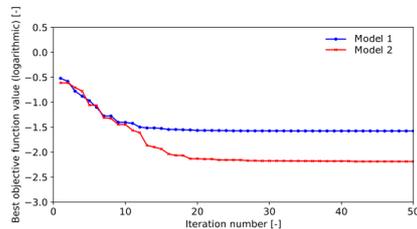


Figure 7. Iteration histories of objective function.

5.2. モデル 2: リエントラント・トライアングル

モデル 2 の初期格子状平板は Figure 5(b) のように、 $n_i = 24$, $m = 16$ としたリエントラント・ハニカムで構成される。1 番目と m 番目のシェブロン・ロッドの外側の接合部は y 方向へ移動可能なローラー支持とする。大きさ 0.30 m の強制変位を、Figure 5(b) の矢印の始点に与える。各構造ユニットのサイズは $w = 0.60$ m, $d = 0.30\sqrt{3}$ m とする。最適化の結果を Figure 8 に示す。モデル 1 と同様に、Figure 8(a) は、曲面上の点の離散ガウス曲率の分布を表し、破線で囲まれた点が \hat{p}_j 、黒の円が点 \hat{p}_{ref} である。目標比は $\chi_j = 1.0$ とする。最適解の初期格子状平板の x, y 方向のサイズはそれぞれ、7.2000 m と 7.8934 m である。Figure 8(b), (c), (d) はそれぞれ yz 平面、各要素の軸応力をコントラストで示した ABAG の変形形状、シェブロン・ロッドの断面せい分布である。Figure 7 から、目的関数は最終イテ

レーションで十分小さな値に収束していることがわかる。

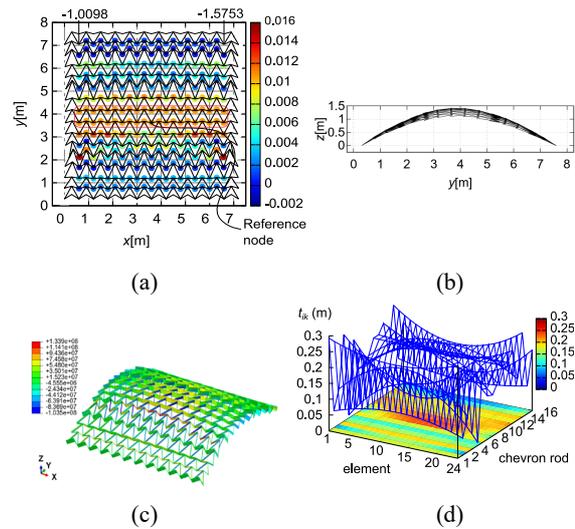


Figure 8. Results of Model 2; (a) Distribution of discrete Gaussian curvature, (b) yz -plane, (c) Curved surface, (d) Distribution of cross-sectional heights of chevron rods.

6. 結論

面内変形に対して負のポアソン比を持つ初期格子状平板より生成される ABAG を設計するための最適設計法を提案した。これにより、設計者の望むガウス曲率比の分布を持つ ABAG が得られる。離散曲率で形状を評価するため、本問題は感度解析が困難であり PSO 法の適用が有効である。数値例題により、設計者が直感で設計することが困難な解が得られ、本手法が ABAG の最適設計手法として有効であることを示した。

謝辞

本研究は、JSPS 19J20405, JST CREST JPMJCR1911 により助成を受けた。ここに記して謝意を表する。

[参考文献]

- 1) Lakes R. Foam structures with a negative Poisson's ratio. Science 1987;235(4792):1038-1040.
- 2) Evans KE. Auxetic polymers: a new range of materials. Endeavour 1991;15(4):170-174.
- 3) Naboni R, Sartori S, Mirante L. Adaptive-curvature structures with auxetic materials. Advanced Materials Research 2018;1149:53-63.
- 4) La Magna R, Knippers J. Tailoring the bending behaviour of material patterns for the induction of double curvature. Humanizing Digital Reality; 2018, p. 441-452.
- 5) Sullivan JM. Curvature measures for discrete surfaces. ACM SIGGRAPH 2005 Courses; 2005.
- 6) Nealen A, Igarashi T, Sorkine O, Alexa M. Laplacian mesh optimization. International conference on Computer graphics and interactive techniques; 2006, p. 381-389.
- 7) Kennedy J, Eberhart R. Particle Swarm Optimization, Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks 1995;4:1942-1948.
- 8) pyswarm 0.6. Web Site. <https://pythonhosted.org/pyswarm/>
- 9) Dassault Systèmes. Abaqus User's Manual Ver 2018; 2018.