

群論に基づく多面体の射影図を用いた建築骨組の作成

A Study on Generation of Framework with projection figure of polyhedron based on Group Theory

○前 稔文^{*1}, 田渕 愛佳^{*2}, 小林 竜一^{*3}, 藤本 教寛^{*4}, 松本 裕司^{*5}
Toshifumi Mae^{*1}, Manaka Tabuchi^{*2}, Ryuichi Kobayashi^{*3}, Yukihiro Fujimoto^{*4} and Yuji Matsumoto^{*5}

*1 大分工業高等専門学校都市・環境工学科 准教授 博士 (工学)

Associate Professor, Dept. of Civil and Environmental Engineering, National Institute of Tech., Oita College, Ph.D.

*2 大分工業高等専門学校機械環境システム工学専攻 准学士

Mechanical-Environmental System Engineering Major, National Institute of Technology, Oita College

*3 フリーランス

Freelance, M. Eng.

*4 大分工業高等専門学校一般科 (理系) 准教授 博士 (理学)

Associate Professor, General Education(Sciences), National Institute of Tech., Oita College, Ph.D.

*5 京都工芸繊維大学デザイン・建築学系 助教 博士 (学術)

Assistant Professor, Design and Architecture, Kyoto Institute of Technology, Ph.D.

キーワード : 多面体; 射影; ベジエ曲線; 建築構造; 骨組解析

Keywords: Polyhedron; projection; Bezier curve; architectural structure; frame analysis.

1. はじめに

群論は、代数構造の基礎となる数学であり、幾何学や解析学などの数学分野にまで幅広く波及している¹⁾。また、群論は、宇宙の初期を記述すると期待されている超弦理論や大統一理論²⁾や、人素粒子標準模型などにおける対称性や保存量など宇宙の根幹の構造に深く関与すると言われている。特に、“超弦理論”からはE8群の存在が示唆されており、安定的に存在している宇宙の創生に関わる謎に、群論や対称性の高いE8群などが関わっていることから、現代物理学と群論は深い関係にあることが分かる。

群論において、「コクセター群」に群構造の本質を多胞体として描写する「コクセタープレーン」が存在し、宇宙構造と関係が深い群について、本質を表した多胞体から得られる構造がある。これを建築形態に応用できれば、形状的合理性あるいは構造的安定性といった視点で、群論由来の安定形状を示すことができるのではないかと考えた。

その第一段階として、まずは3次元空間多胞体である多面体であり、特に対称性が高く自然界に5つしか存在しないことが証明されている正多面体を扱い、三次元座標軸上で回転させた各頂点の座標を2次元平面に射影し、正多面体の隣り合う頂点同士を直線で結んだ図の生成を行ってきた。さらに、生成した図を建築骨組として適用

し、それらに荷重を作用させた場合の骨組解析を通じて、構造的な強度の観点から形状の安定性について検討してきた⁴⁾⁻⁶⁾。

その延長として、生成された射影図形を用いて平面を充填させ、さらに、その平面充填形に高さを与え、それによって空間を覆う構造の提案を目指している。ここでは、その構造物の基礎的な力学特性について検討する。

2. 射影図形の生成と平面の充填

本研究では、5つしか存在しない正多面体(面数 $n=4, 6, 8, 12, 20$)を扱うこととした。それらの図形を回転させるが、回転前の座標を (x, y, z) 、回転後の座標を (x', y', z') とし、図-1に示すように、X軸周りに a° 、Y軸周りに b° 反時計回りに回転させ、Z軸方向から図形の各頂点を射影し、基本図形に倣って頂点を直線で結ぶ。ここで、回転させる座標軸は図形の中心に位置し、回転角はX軸およびY軸周りともに 0° から 90° までの 15° 刻みとして、それぞれ組み合わせで回転させ、射影された正多面体の各頂点の座標を下式より求めた。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos b & \sin a \sin b & \cos a \sin b \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ -\sin b & \sin a \cos b & \cos a \cos b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

なお、Z軸周りは、回転させても射影図の形状に変化がないため、回転角は 0° とした。

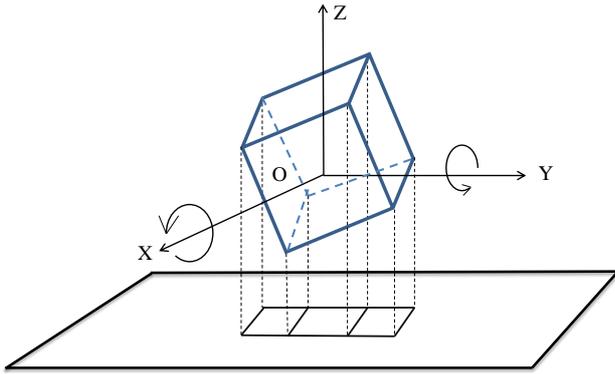


図-1 座標軸と回転の設定

以上の手順で生成された射影図形は、245個得られるが、重複する図形が多い。また、図-2は平面を充填できる射影図形を示すが、11個のモデルしか得られなかった。

したがって、本稿では、図-2が示す射影図形を対象とし、それらを2×2個用いて平面を充填させたモデルを扱うことにした。なお、正四面体については、回転により得られた三角形の射影図形を6つ用いて充填させて六角形の図形を構成し、これを一つの射影図形と見なしている。また、同図1)は格子状のモデルを示すが、生成されたモデルとの比較対象として用いた。

3. 立体形状の生成

ここでは、平面充填形の射影モデルに高さを与え、立体形状の生成について述べる。

まず、端部を支点とし、空間部分の確保のために、それ以外の節点に高さを与えた。その際、形状の自由度が高く得られると考え、ベジエ曲線およびベジエ曲面を用いた。

一般に、 u 軸方向 $m+1$ 個、 v 軸方向 $n+1$ 個の制御点からなるベジエ曲面上の点 $P(u,v)$ は、次式から求めることが出来る⁷⁾。

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) q_{ij}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1 \quad (2)$$

ここに、 q_{ij} は平面上で格子状に配置した制御点であり、 $B_i^m(u)$ はBernstein多項式で、

$$B_i^m(u) = {}_m C_i u^i (1-u)^{m-i} \quad (3)$$

${}_m C_i$ は二項係数で、

$${}_m C_i = \binom{m}{i} = \frac{m!}{i!(m-i)!} \quad (4)$$

となり、 $B_j^n(v)$ についても同様に得られる。

平面形状に外接する長方形を用意し、その中心、4角、4辺の中点の9点($P_{11}, P_{12}, \dots, P_{33}$)を制御点とし、高さを与える。また、設定した間隔で補助線を引き、交わる点を新たな節点とする(図-3)。

このとき、各節点の高さ $P(u,v).z$ は(2)式と各制御点の座

標から、

$$P(u,v).z = (1-u)^2 L_1(v).z + 2u(1-u) L_2(v).z + u^2 L_3(v).z \quad (5)$$

$$L_1(v).z = (1-v)^2 P_{11}.z + 2v(1-v) P_{12}.z + v^2 P_{13}.z$$

$$L_2(v).z = (1-v)^2 P_{21}.z + 2v(1-v) P_{22}.z + v^2 P_{23}.z$$

$$L_3(v).z = (1-v)^2 P_{31}.z + 2v(1-v) P_{32}.z + v^2 P_{33}.z$$

$$u = (x - P_{11}.x) / (P_{31}.x - P_{11}.x), \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$v = (y - P_{11}.y) / (P_{13}.y - P_{11}.y), \quad 0 \leq v \leq 1$$

となる。

図-4は、以上の操作をプログラム上で扱えるようにしたインターフェースを示す。

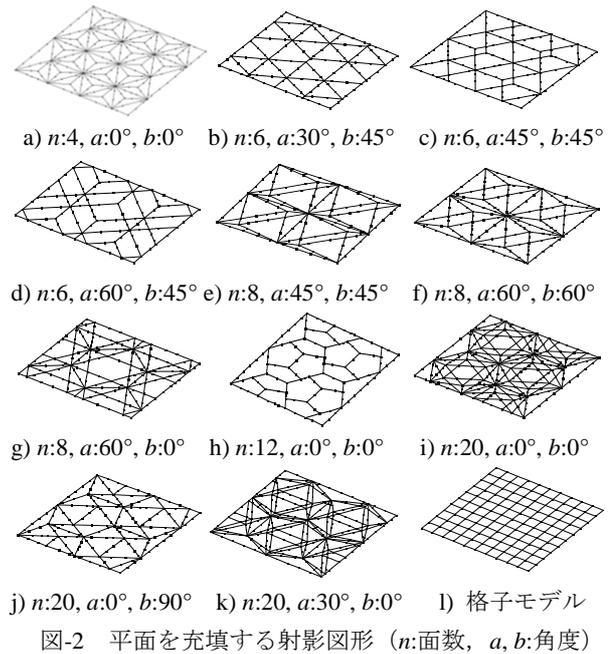


図-2 平面を充填する射影図形 (n :面数, a, b :角度)

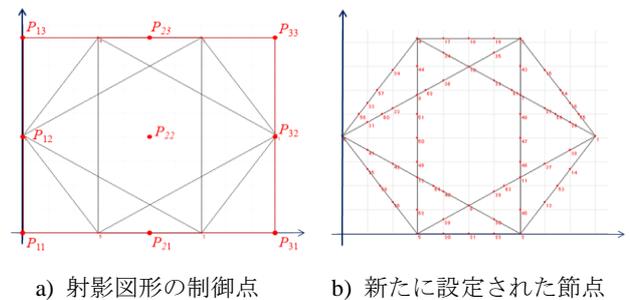


図-3 制御点と新たな節点の設定

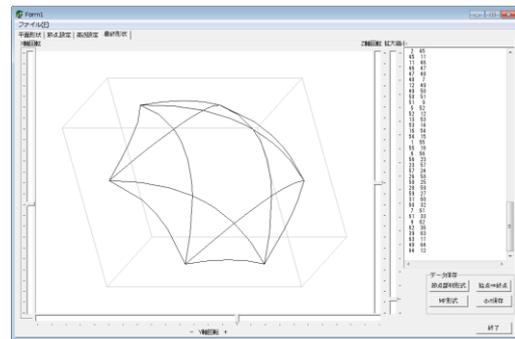


図-4 モデル生成のインターフェース

4. 骨組解析

ここでは、生成した射影モデルを構造物に適用した場合の骨組解析について述べる。

図-5および6は、前章のプログラムを用いて、作成した図-4の射影図形をもとにして一方向にむくりを付けたトンネル形状モデル、および二方向にむくりを付けたベジェ曲面モデルを示す。

構造物の節点については、平面充填形のモデルの場合、外周の節点をヒンジ支点とし、トンネル形状モデルについてはベジェ曲線の端部となる節点のみをヒンジ支点とし、ベジェ曲面モデルについては四隅をヒンジ支点とし、支点以外の節点は剛接合とした。いずれのモデルにおいても、平面的に覆う面積は、約 100m^2 と一定となるようにし、最長部高さは、トンネル形状モデルは 2.500m 、ベジェ曲面モデルは 3.750m とした。

部材には、断面が外径 101.6mm で厚さが 5mm の鋼管 (SN400) を用いた。荷重については、 1kN/m^2 の鉛直荷重が各モデルに作用するものとし、自重と共に各部材に作用させた。

以上の設定条件のもと、Multiframe を用いて骨組解析を行った。

5. 解析結果

図-7~9は、平面充填形モデル、トンネル形状モデル、およびベジェ曲面モデルの最大鉛直変位 δ_{\max} と最大曲げモーメント M_{\max} を示す。

各図において、■が射影図形をもとにして生成された各モデルの最大鉛直変位 δ_{\max} で、○が最大曲げモーメント M_{\max} である。また、図中の直線が格子モデルの最大鉛直変位 δ_{\max} で、破線が最大曲げモーメント M_{\max} である。なお、各グラフの横軸のアルファベットは、図-4~6のモデルのキャプションと一致する。

平面充填形モデルの最大鉛直変位 δ_{\max} に着目すると、格子モデルのそれは 3.68mm であるのに対して、ほとんどのモデルは格子モデルより小さく抑えられ、正20面体 ($a = 0^\circ, b = 0^\circ$ および $a = 0^\circ, b = 90^\circ$) のモデルでは、 1.93mm および 1.73mm とおよそ半分まで抑制された。最大曲げモーメント M_{\max} については、格子モデルよりも小さく得られたモデルが5つあり、正8面体 ($a = 45^\circ, b = 45^\circ$) が最小となった。

次に、トンネル形状モデルの解析結果について述べる。格子モデルの最大鉛直変位 δ_{\max} は 0.16mm と非常に小さい。それに対して、トンネル形状モデルの最大鉛直変位 δ_{\max} は、平面充填形モデルに比べて大きく抑制されているが、格子モデルに比べれば、いずれのモデルにおいてもその値は大きかった。一方で、最大曲げモーメント M_{\max} については、ほとんどのモデルにおいて、格子モデルに比べて小さく得られた。

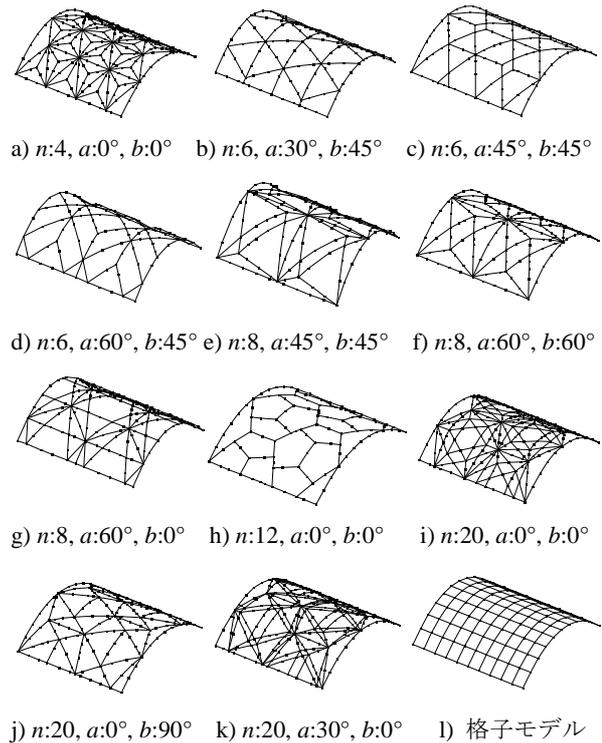


図-5 トンネル形状モデル (n :面数, a, b :角度)

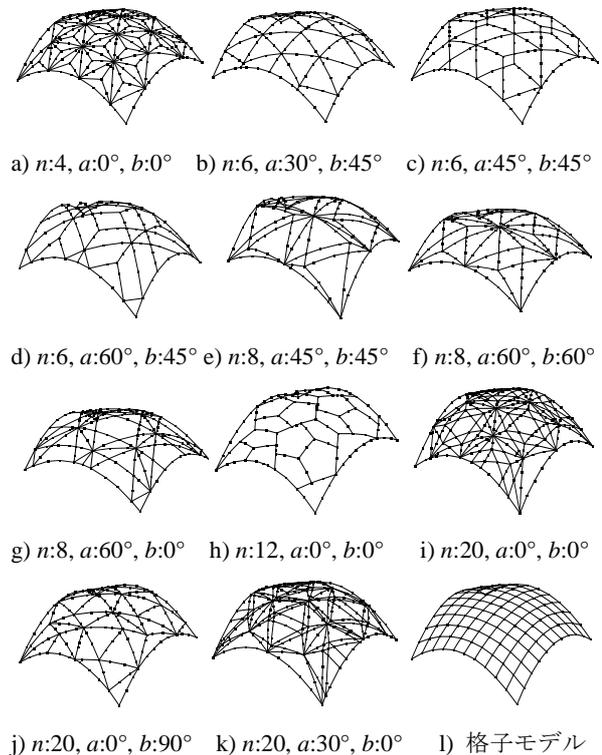


図-6 ベジェ曲面モデル (n :面数, a, b :角度)

ベジェ曲面モデルにおいては、ほとんどのモデルは、最大鉛直変位 δ_{\max} が格子モデルのそれよりも値は小さく得られ、最大曲げモーメント M_{\max} も同様に、格子モデルよりも値が小さい結果が得られた。

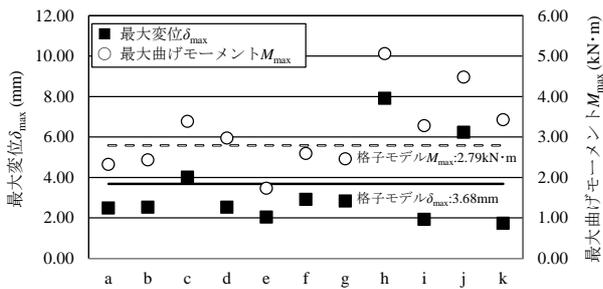


図-7 平面充填形モデルの最大鉛直変位 δ_{\max} と最大曲げモーメント M_{\max}

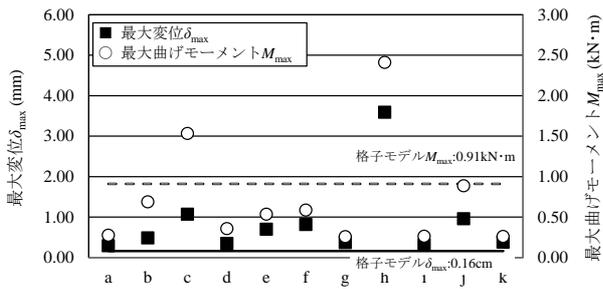


図-8 トンネル形状モデルの最大鉛直変位 δ_{\max} と最大曲げモーメント M_{\max}

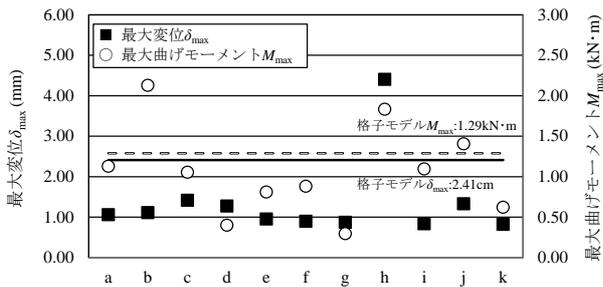


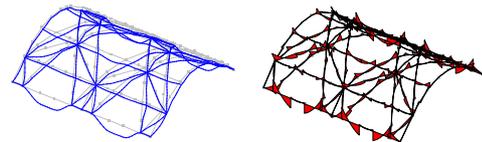
図-9 ベジエ曲面モデルの最大鉛直変位 δ_{\max} と最大曲げモーメント M_{\max}

以上から、比較対象である格子モデルに比べて最大鉛直変位 δ_{\max} や最大曲げモーメント M_{\max} を抑制できるモデルが得られることが分かった。

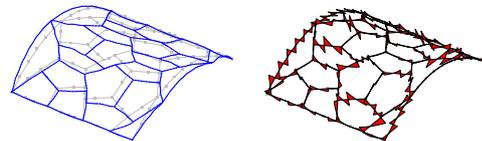
また、各形状モデルのうち、正8面体をX軸周りに 60° 、Y軸周りに 0° 回転させたモデルで、最大鉛直変位 δ_{\max} や最大曲げモーメント M_{\max} が抑制された。一方で、両方とも、正12面体をX軸周りに 0° 、Y軸周りに 0° 回転させたモデルは、あまり抑制されなかった。この傾向は、トンネル形状およびベジエ曲面モデルにおいても共通してみられ、それらの変形図と曲げモーメントの分布図を図-9および10に示す。

6. まとめ

本研究は、幾何学的な安定性が期待される形状を建築骨組への適用を検討したものである。ここでは、正多面体を回転させた射影図形を用いて平面を充填し、それをもとに立体骨組を生成した。

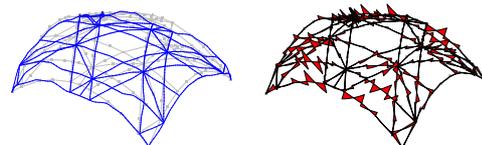


a) 正8面体 ($a = 60^\circ, b = 0^\circ$)

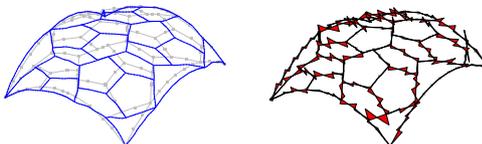


b) 正12面体 ($a = 0^\circ, b = 0^\circ$)

図-9 トンネル形状モデルの変形と曲げモーメント



a) 正8面体 ($a = 60^\circ, b = 0^\circ$)



b) 正12面体 ($a = 0^\circ, b = 0^\circ$)

図-10 ベジエ曲面モデルの変形と曲げモーメント

骨組解析結果より、生成したモデルのうち、格子モデルと比べて変位や曲げモーメントの値が小さいモデルもみられ、構造的な安定性を有するモデルを生成できる可能性を確認できたものと考えられる。

一方で、部材長さや荷重の作用位置に偏りがあり、現段階では支点や節点の数がモデルによって異なるため、今後は骨組解析の条件等を改善して、力学的な検討を行う予定である。

【参考文献】

- 1) 群の公理 : <http://hooktail.sub.jp/algebra/GroupAxiom/>
- 2) Yukihiro FUJIMOTO, Tatsuo KOBAYASHI, Kenji NISHIWAKI, Makoto SAKAMOTO, Yoshiyuki TATSUTA : "Comprehensive Analysis of Yukawa Hierarchies on T 2 /ZN with Magnetic Flux", Phys. Rev. D 94, 035031 (2016), 035031-1-035031-14, arXiv : 1605.00140 hep-ph.
- 3) H.S.M コクセター : 幾何学入門<上>, ちくま学芸文庫, 2009.
- 4) 前 稔文 : 群論由来の安定性を有する多面体の投射による骨組構造, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 情報システム技術, pp.33-34, 2018.9.
- 5) 前 稔文, 小林 竜一, 藤本 教寛 : 群論由来の多面体構造を基にした射影形状の構造への適用, 日本建築学会第 41 回情報・システム・利用・技術シンポジウム論文集, pp.196-199, 2018.12.
- 6) 田淵愛佳, 前 稔文 : 群論に基づく多面体の射影図を用いた平面充填形の構造形態への適用, 日本建築学会大会学術講演概要集 A-2 分冊, pp.127-128, 2020.9.
- 7) 前川 佳徳 : コンピュータグラフィックス, オーム社, 2001.