

シグモイド関数を使用したシェルの形状・板厚分布同時最適化 -シグモイド関数の傾きの差異による収束性の考察- Simultaneous optimization of shell shape and thickness distribution using sigmoid function -Consideration of convergence due to difference in slope of sigmoid function-

○渡辺 哲平*1, 藤田 慎之輔*2
Teppei Watanabe*1, Shinnosuke Fujita*2

*1 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 大学院生

Graduate Student, Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu

*2 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 准教授

Assoc. Prof., Graduate School of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu, Dr. Eng.

キーワード : シグモイド関数 トポロジー最適化 シェル構造物
Keywords : Sigmoid function Topology optimization Shell structure

1. 序論

連続体シェルの形状と板厚分布の同時最適化は連続変数最適化問題となるため、逐次二次計画法などの関数の勾配情報を利用する理論的手法を用いて最適解を得ることが一般的である。形状と板厚分布を直接的に設計変数として扱うと計算速度の低下や解の発散を招く恐れがあるため、パラメトリック曲面により離散化する手法が提案されている¹⁾。また、板厚分布最適化において節点板厚にシグモイド関数を乗じたトポロジー最適化手法も提案されている²⁾。本研究では、節点板厚と要素板厚の両方にシグモイド関数を乗じることとし、シグモイド関数の傾きの違いによる最適化結果の差異について考察する。

2. B スプライン関数による形状と板厚分布の離散化

本研究では、シェル形状のみでなく板厚分布もパラメトリック曲面で離散化を行い、解の収束性の悪化や計算コストの肥大化を防ぐ。シェルの節点座標は $(J+1) \times (J+1)$ の制御ネットを有する B スプライン曲面により離散化するものとする。各制御点の x 座標を並べたベクトルを \mathbf{q}_x , y 座標を並べたベクトルを \mathbf{q}_y , 形状に関する制御点の鉛直方向座標を並べたベクトルを \mathbf{q}_z , 板厚に関する制御点の鉛直方向座標を並べたベクトルを \mathbf{q}_t とおく。

$$\mathbf{q}_x = (q_{x,00} \ \cdots \ q_{x,0J} \ \cdots \ q_{x,J0} \ \cdots \ q_{x,JJ})^T \quad (1a)$$

$$\mathbf{q}_y = (q_{y,00} \ \cdots \ q_{y,0J} \ \cdots \ q_{y,J0} \ \cdots \ q_{y,JJ})^T \quad (1b)$$

$$\mathbf{q}_z = (q_{z,00} \ \cdots \ q_{z,0J} \ \cdots \ q_{z,J0} \ \cdots \ q_{z,JJ})^T \quad (1c)$$

$$\mathbf{q}_t = (q_{t,00} \ \cdots \ q_{t,0J} \ \cdots \ q_{t,J0} \ \cdots \ q_{t,JJ})^T \quad (1d)$$

節点数を n , 要素数を m とし、節点座標ベクトル \mathbf{r} ならびに節点における板厚値 (節点板厚) を並べたベクトル \mathbf{t} を次式で定義する。

$$\mathbf{r} = (\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}) \quad (2a)$$

$$\mathbf{x} = (x_1 \ \cdots \ x_n)^T \quad (2b)$$

$$\mathbf{y} = (y_1 \ \cdots \ y_n)^T \quad (2c)$$

$$\mathbf{z} = (z_1 \ \cdots \ z_n)^T \quad (2d)$$

$$\mathbf{t} = (t_1 \ \cdots \ t_n)^T \quad (3)$$

このとき、節点座標並びに節点板厚は次式のように離散化される。

$$x_k = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J q_{x,ij} \mathbf{B}_{i,N}(u_k^s) \mathbf{B}_{j,M}(v_k^s), \quad k = 1, \dots, n \quad (4a)$$

$$y_k = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J q_{y,ij} \mathbf{B}_{i,N}(u_k^s) \mathbf{B}_{j,M}(v_k^s), \quad k = 1, \dots, n \quad (4b)$$

$$z_k = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J q_{z,ij} \mathbf{B}_{i,N}(u_k^s) \mathbf{B}_{j,M}(v_k^s), \quad k = 1, \dots, n \quad (4c)$$

$$t_k = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J q_{t,ij} \mathbf{B}_{i,N}(u_k^s) \mathbf{B}_{j,M}(v_k^s), \quad k = 1, \dots, n \quad (5)$$

ここで $(u_k^s \ v_k^s)$ は k 番目の節点の節点座標に対応したパラメータ, $\mathbf{B}_{i,N}(u)$ は u 方向の N 次の B スプライン基底関数であることを表す。

ここで、板厚が非常に小さい値をとった場合、実際の施工を行うことは困難になることを防ぐため、節点板厚に閾値 \bar{t}_{\min} を設け、 \bar{t}_{\min} を下回る際にはシェル形状に開口部を開けることを考える。このとき、節点板厚は次のように表される。

$$p^{t_k} = \begin{cases} t_k & \text{if } t_k \geq \bar{t}_{\min} \\ 0 & \text{if } t_k < \bar{t}_{\min} \end{cases} \quad k = 1, \dots, n \quad (6)$$

しかし、式(6)は $p^{t_k} = \bar{t}_{\min}$ で不連続となるため、感度解析を行うことができない。そこで、式(6)にシグモイド関数を乗じたものを節点板厚として定義する。

$$p_k^{t_e} = \frac{p^{t_k}}{1 + \exp\{\alpha(\bar{t}_{\min} - p^{t_k})\}} \quad k = 1, \dots, n \quad (7)$$

本研究で用いる有限要素解析は要素内で板厚は一定であり、節点板厚は定義されない。そこで、節点板厚の平均値を次のように定義し、有限要素の要素板厚として用いることを考える。

$$e^{t_e} = \frac{p^{t_{e^i}} + p^{t_{e^j}} + p^{t_{e^k}}}{3} \quad e = 1, \dots, m \quad (8)$$

e^i, e^j, e^k は要素 e の頂点における節点番号であり、 $p^{t_{e^i}}, p^{t_{e^j}}, p^{t_{e^k}}$ は e^i, e^j, e^k に対応する節点板厚である。ここで、開口部付近で $0 < e^{t_e} < \bar{t}_{\min}$ となる場合を考慮して、 e^{t_e} に再びシグモイド関数を乗じる(式(9))。

$$e_e^{t_e} = \frac{e^{t_e}}{1 + \exp\{\alpha(\bar{t}_{\min} - e^{t_e})\}} \quad e = 1, \dots, m \quad (9)$$

式(9)において、 $e_e^{t_e} = 0$ の場合に剛性マトリクスが特異となることを防ぐため、きわめて小さな値 ε を加えたものを有限要素の板厚として定義する。

3. 設計問題の定式化

シェルの総体積を V 、体積の上限値を \bar{V} 、下限値を V_{\min} 、節点変位ベクトルを \mathbf{u} 、線形弾性行列を \mathbf{K} とする。本研究では、設計変数 \mathbf{X} に \mathbf{q}_z ならびに \mathbf{q}_t をとり、以下の最適化問題を解くことでシェルの形状最適化、板厚分布最適化、シェルの形状と板厚分布の同時最適化を行う。

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{X}}{\text{minimize}} && f = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \\ & \text{subject to} && V_{\min} \leq V \leq \bar{V} \\ & && \mathbf{r}^* = \mathbf{r}_{\text{ini}}^* \\ & && t_k \leq \bar{t}_{\max} \quad k = 1, \dots, n \\ & && \bar{q}_{z,\max} \leq q_{z,ij} \leq \bar{q}_{z,\max} \quad i = 0, \dots, I \\ & && \bar{q}_{t,\max} \leq q_{t,ij} \leq \bar{q}_{t,\max} \quad j = 0, \dots, J \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \text{if } \mathbf{X} = \mathbf{q}_z && \dots \text{形状最適化} \\ & \text{if } \mathbf{X} = \mathbf{q}_t && \dots \text{板厚分布最適化} \\ & \text{if } \mathbf{X} = (\mathbf{q}_z^T \quad \mathbf{q}_t^T)^T && \dots \text{同時最適化} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 \mathbf{r}^* は支持点の節点座標ベクトル、 $\mathbf{r}_{\text{ini}}^*$ は \mathbf{r}^* の初期値である。 \bar{t}_{\max} は要素板厚の上限値、 $\bar{q}_{z,\min}, \bar{q}_{z,\max}$,

$\bar{q}_{t,\min}, \bar{q}_{t,\max}$ は設計変数の上下限值である。実務においては、意匠性や内部環境性などを理由に、開口を設けたくない箇所があらかじめ指定される場合も考えられる。そこで、指定された箇所には開口を設けない制約を式(12)のように設定する。 S は開口を設けない箇所の要素番号の集合である。

$$\text{subject to } \bar{t}_{\min} \leq t_i \quad (i \in S) \quad (12)$$

4. 数値解析例

4.1. 解析概要

本研究ではopensees³⁾を用いて弾性解析を行う。最適化計算にはpyOpt⁴⁾を用い、逐次二次計画法により解く。一辺の長さが30mの正方形平面を有するライズ10mの裁断球殻シェルを考える(図1)。境界条件は図中に●で表した四隅を固定支持とする。形状並びに板厚分布はいずれも $N = M = 3$ 次のBスプラインにより離散化し、制御点は x - y 平面に 6×6 の格子状($I = J = 5$)に配置する。節点数は $n = 121$ 、要素分割は $m = 200$ とする。外力は自重として 24 kN/m^3 を作用させる。材料はコンクリートを想定する。初期のシェル厚は一様に 0.2 m とする。

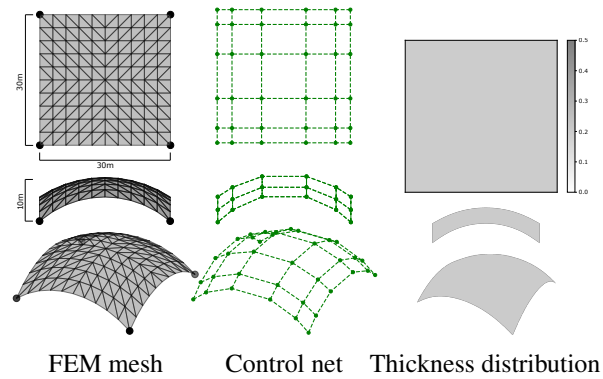


図1 Analysis model

4.2. 形状最適化

$\mathbf{X} = \mathbf{q}_z$, $\bar{q}_{z,\min} = -30 \text{ m}$, $\bar{q}_{z,\max} = 30 \text{ m}$, $\bar{V} = 202.96 \text{ m}^3$ として問題(10)を解いて得られた最適解曲面のシェル形状を示す。また、比較対象として、原曲面のシェル形状を図2左に示す。図中に f として示した値は、目的関数であるひずみエネルギーの値、 V として示した値は、最適解における体積の値、 f/f_{ini} は原曲面のひずみエネルギーと最適化後のひずみエネルギーとの割合である。

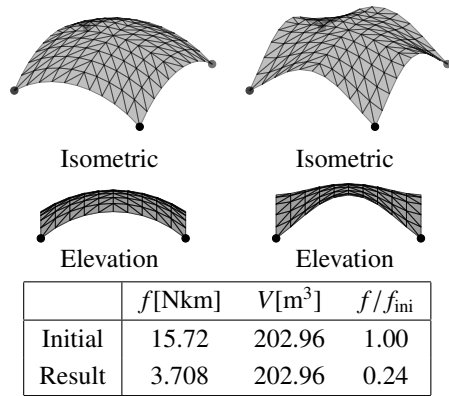


図2 Initial shape(left) and Optimal shape(right)

4.3. 板厚分布最適化

$X = \mathbf{q}_t$, $\bar{q}_{t,\min} = -2\text{m}$, $\bar{q}_{t,\max} = 1\text{m}$, $\bar{t}_{\min} = 0.15\text{m}$, $\bar{t}_{\max} = 0.5\text{m}$, $\bar{V} = 202.96\text{m}^3$, $V_{\min}=0.8\bar{V}$ として問題 (10) を解いて得られた板厚分布最適解を図4に示す. t_u , t_l はそれぞれ t_e の最大値・最小値である. また, 本研究では式(9)における $\alpha=200, 600, 1000$ として最適化計算を解く. シェルの中央部を残すため, 式(12)において, シェル中央部の節点番号を S に選んだ場合(図3)の最適結果を図5に示す.

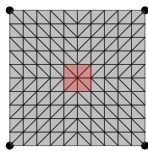


図3 nodes included in set S(these nodes cannot be vanished)

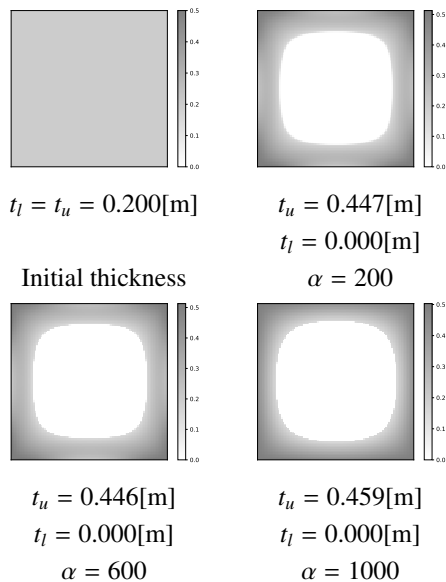


図4 Thickness optimization result

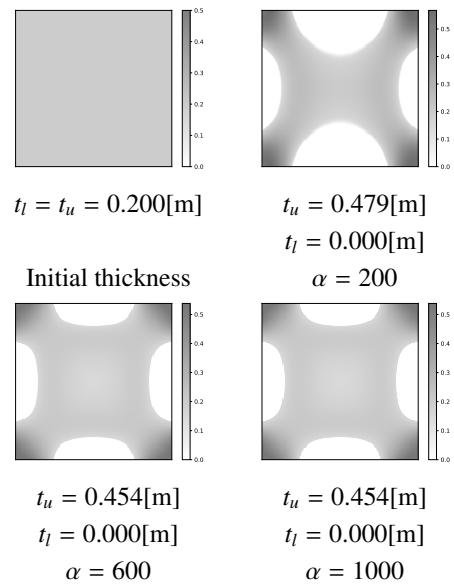


図5 Thickness optimization result(No central opening)

最適化結果(図4)を見ると, シェル中央部に開口が設けられていることが分かる. 支持点から離れた箇所に開口を設けることで曲げモーメントが小さくなりひずみエネルギーが減少している. 中央部に開口を設けない制約を与えた場合(図5), シェル中央部に開口は設けられず, 支持点から中央部に向けて対角線上に厚みが残っていることが確認できる. また, 支持点近傍の板厚が最も大きくなっている. 曲げが集中する支持点近傍の板厚が大きくなり変位が小さくなることでひずみエネルギーを減少している. 中央部制約を設けることで実行可能領域を小さくしているにもかかわらず, 中央部制約を設けない場合よりひずみエネルギーが小さくなる板厚分布が得られた. シグモイド関数を乗じて離散変数を強引に連続変数としており, 目的関数が複雑な多峰性関数となっている可能性が高く, 局所最適解に収束していると考えられる.

4.4. 同時最適化

$X = (\mathbf{q}_z^T \quad \mathbf{q}_t^T)^T$, $\bar{q}_{t,\min} = -2\text{m}$, $\bar{q}_{t,\max} = 1\text{m}$, $\bar{t}_{\min} = 0.15\text{m}$, $\bar{t}_{\max} = 0.5\text{m}$, $\bar{V} = 202.96\text{m}^3$, $V_{\min}=0.8\bar{V}$ として問題 (10) を解いて得られた最適解曲面のシェル形状と板厚分布最適解を図6に示す. また, 板厚分布最適化と同様に式(9)における $\alpha=200, 600, 1000$ として最適化計算を解く. 板厚分布最適化同様, シェルの中央部を残すため, 式(12)において, シェル中央部の節点番号を S に選んだ場合(図3)の最適化結果を図7に示す.

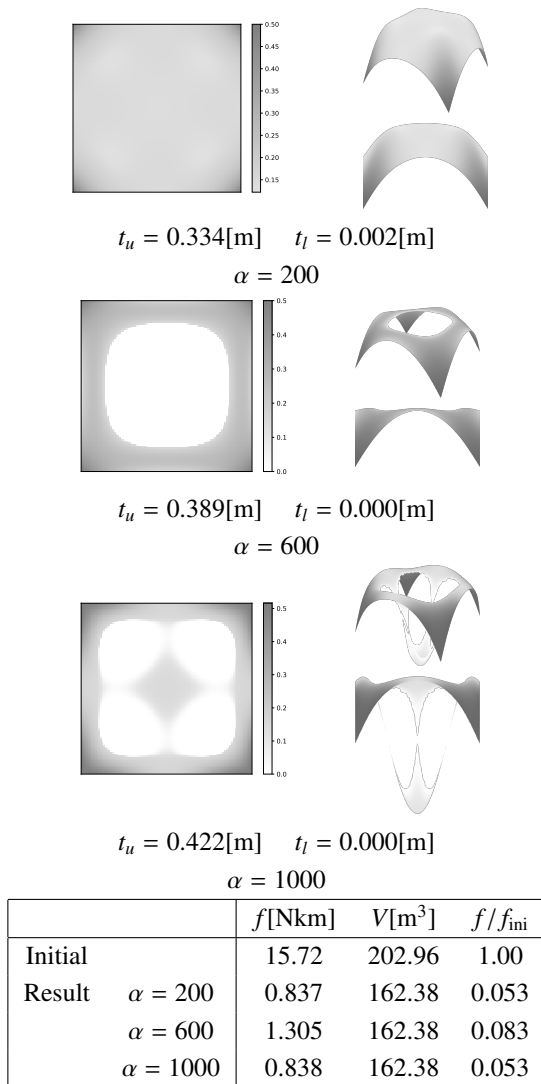


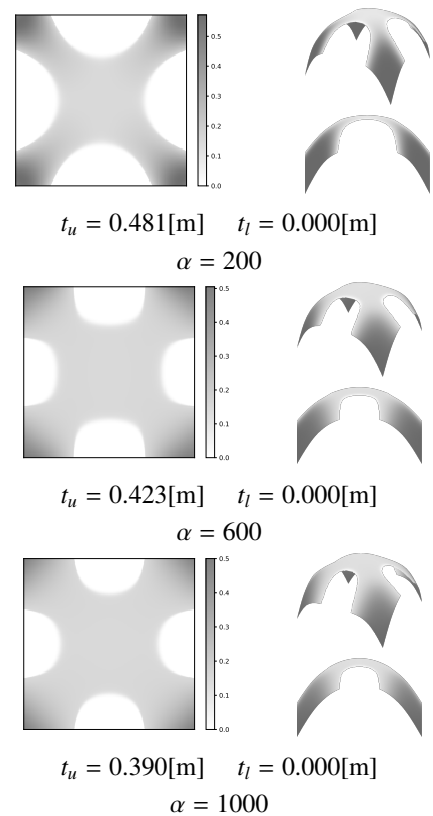
図6 simultaneous optimization result

最適化結果(図6)を見ると、 α によって得られる形状に多様性があり、局所最適解に収束していると考えられる。 $\alpha = 600$ ではシェル中央部に開口が設けられ、シェルのライズがカタナリー状に上がることで曲げモーメントが小さくなりひずみエネルギーが減少している。一方、 $\alpha = 1000$ ではトポロジーが分断された不適切な形状が得られた。中央部に開口を設けない制約を与えた場合(図7)、板厚分布最適化同様、支持点近傍の板厚が最も大きくなっており、支持点から中央部に向けて対角線上に厚みが残っていることが確認できる。

5. 結論

節点板厚と要素板厚にシグモイド関数を乗じ、形状最適化と開口部を考慮した板厚分布の同時最適化を行った。得られた結果は以下のようにまとめられる。

- 体積制約、シグモイド関数の係数 α によって最適形状に様々な形状が見られる。
- α の値により不適切な形状が得られる場合がある。



	f [Nkm]	V [m ³]	f/f_{ini}
Initial	15.72	202.96	1.00
Result $\alpha = 200$	0.773	162.38	0.049
$\alpha = 600$	0.901	162.38	0.057
$\alpha = 1000$	0.938	162.38	0.060

図7 simultaneous optimization result(No central opening)

6. 今後の展望と課題

本手法では、外力として自重のみが考慮されており、開口部は極めて小さな剛性となるため、変形が大きかったとしてもひずみエネルギー値自体は小さな値を取ることがある。 $\alpha = 1000$ のトポロジーなどは抑制されたひずみエネルギー値とは裏腹に実際には非常に大きな変形を伴うため、安定して優良解を得るためには変形に対する制約を合わせて付加する必要があると考えられる。

【参考文献】

- 1) 木村俊明, 大森博司. 形状と厚さの同時最適化法の定式化とその応用-自由曲面シェル構造の構造形態創生手法の提案(その1)-. 日本建築学会構造系論文集, Vol. 74, No. 640, pp. 1091-1098, 2009.6.
- 2) 藤田慎之輔, 寒野善博. シグモイド関数を用いたシェル構造物の形状・板厚・位相同時最適化. 日本機械学会論文集, Vol. 85, No. 872, pp. 18-00160, 2019.4.
- 3) M. Zhu, F. McKenna, and M. Scott. Openseespy: Python library for the openses finite element framework. *SoftwareX*, Vol. 7, pp. 6-11, 2018.1.
- 4) R. E. Perez, P. W. Jansen, and J. R. R. A. Martins. pyopt: a python-based object-oriented framework for nonlinear constrained optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 45, No. 1, pp. 101-118, 2012.1.