

最小ラーマングラフの総交差数への新たな上下界

New Upper and Lower Bounds for the Total Number of Edge Crossings of Euclidean Minimum Weight Laman Graphs

○小林 祐貴^{*1}, 東川 雄哉^{*2}, 加藤 直樹^{*3}, 吉山 大雅^{*4}
Yuki KOBAYASHI^{*1}, Yuya HIGASHIKAWA^{*2}, Naoki KATOH^{*3}, and Taiga YOSHIYAMA^{*4}

*1 大阪市立大学大学院工学研究科 講師 博士(工学)

Lecturer, Graduate School of Engineering, Osaka City University, Ph.D.

*2 兵庫県立大学大学院情報科学研究科 准教授 博士(工学)

Associate Professor, Graduate School of Information Science, University of Hyogo, Ph.D.

*3 兵庫県立大学大学院情報科学研究科 教授 博士(工学)

Professor, Graduate School of Information Science, University of Hyogo, Ph.D.

*4 大阪市立大学大学院工学研究科 前期博士課程

Graduate student, Graduate School of Engineering, Osaka City University.

キーワード: デザイン科学; 計算幾何; 組合せ剛性理論; Bar-joint フレームワーク; 幾何的グラフ

Keywords: Design science; Computational geometry; Combinatorial rigidity; Bar-joint frameworks; Geometric graphs.

1. はじめに

グラフ $G = (V, E)$ について, $|E| = 2|V| - 3$ かつ, G の任意の部分グラフ H について $|E(H)| \leq 2|V(H)| - 3$ が成り立つとき, G をラーマングラフと呼ぶ. ラーマングラフは一般的な配置の bar-joint フレームワークとして平面に実現したとき, 極小剛となる性質を持つ^{1,2)}. 極小剛な bar-joint フレームワークは, 少ない部材数で剛な構造物を構築することができるため, 筆者らは建築への応用を目指し, これまで研究を行なっている³⁾.

ここで, 本研究で対象とするグラフを定義する. 平面上に n 個の点集合 P が与えられたとき, P の幾何的グラフは, 各辺が P の 2 点間の線分の集合 E により $G(P) = (P, E)$ と表される. 本研究において, P のどの 3 点も一直線上にはなく, 全ての頂点間の距離は異なるものとする. このような仮定を満たす頂点集合を準一般的な配置と呼ぶ. 2次元 bar-joint フレームワークを幾何的グラフと見なし, 幾何的グラフの基礎グラフがラーマングラフであるとき, ユークリッドラーマングラフと呼ぶ. さらに, P についてのユークリッドラーマングラフを考えたとき, 辺の長さの総和が最小となるユークリッドラーマングラフ (Euclidean minimum weight Laman graph) を $MLG(P)$ とする.

2次元 bar-joint フレームワークを作成する際には, 部材同士が交差することはできるだけ少なくしたい. $MLG(P)$ がどの程度交差するか, あらかじめわかっているならば, 接合部に厚みを持たせるなどの工夫をすることで作成したり, 交差する部分については, 辺長は最小ではなくなるが, 極小剛性は有するように辺を取り替えること

で交差を減らすことも考えられる. このような目的から, 本研究では $MLG(P)$ の辺交差数の新たな上下界を明らかにする.

これまでに計算機実験によって $MLG(P)$ の交差数は 2章で示す Bereg ら⁴⁾ が示した上界よりも, かなり少ないことがわかった⁵⁾. このことから, より精緻に $MLG(P)$ の性質を調べることを試みた. なお, 3章, 4章の補題と定理の証明は, 国際会議 COCOON 2021 において発表を予定している.

2. 準備

はじめに, いくつかの表記法を定義する. p を中心とする半径 r の閉円板を $D_p(r)$ とし, p を中心とする半径 r の円を $C_p(r)$ とする. ここで平面上の 2 点 p, q について, $Lens(pq) = D_p(pq) \cap D_q(pq)$ とする. $bisect(pq)$ は線分 pq の垂直二等分線とする. $Up_Lens(pq)$ は $Lens(pq)$ を $bisect(pq)$ で二分して得られる閉領域のうち p を含むものとし, $Low_Lens(pq)$ は $Lens(pq)$ を $bisect(pq)$ で二分して得られる閉領域のうち q を含むものとする. $L_Lens(pq)$ は $Lens(pq)$ を pq で二分して得られる閉領域のうち, $q \rightarrow p$ の左側のもの, $R_Lens(pq)$ は $Lens(pq)$ を pq で二分して得られる閉領域のうち, $q \rightarrow p$ の右側のものとする. 点 p と p を端点とする 2 つの半直線 l, l' について, l, l' のなす角の小さい方を $angle_p(l, l')$ とし, l, l' に挟まれる領域を $Cone_p(l, l')$ とする.

最小全域木 $MST(P)$ と $MLG(P)$ について次の補題が Bereg ら⁴⁾ によって示されている.

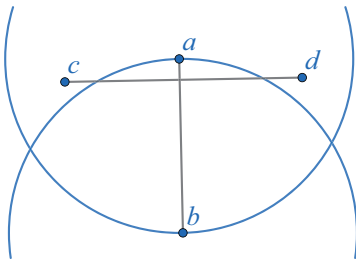
補題 1.⁴⁾ $MST(P) \subseteq MLG(P)$ が成り立つ.

次章では補題 1 より, $MLG(P)$ の辺を $MST(P)$ とそれ以外に分類する.

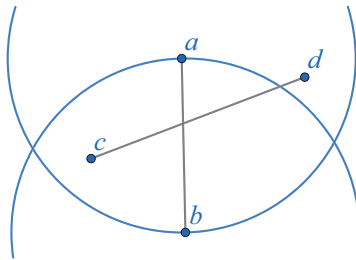
次の補題は $ab \in MLG(P)$ について $Lens(ab)$ に含まれる P の点が満たす性質を示している.

補題 2.⁴⁾ 辺 $ab \in MLG(P)$ について考える. この時, 下記が成り立つ.

- (i) $L_Lens(ab)$ と $R_Lens(ab)$ にそれぞれ含まれる P の点は高々1点存在する.
- (ii) $L_Lens(ab)$ と $R_Lens(ab)$ に P の点が存在するとき, すなわち, $c \in L_Lens(ab)$, $d \in R_Lens(ab)$ を満たすならば, $ab < cd$ かつ $cd \notin MLG(P)$.



(a)



(b)

図 1 (a) ab に対する lens-crossing 辺 cd (b) ab に対する fan-crossing 辺 cd

ここで, 既往研究⁴⁾と本研究において重要な分類を次のように定義する (図 1).

定義 1. (lens-crossing 辺) 4 点 $a, b, c, d \in P$ について, 線分 ab と cd が交差しており, $c, d \notin Lens(ab)$ とする. このとき, cd を ab の lens-crossing 辺と呼ぶ.

定義 2. (fan-crossing 辺) 4 点 $a, b, c, d \in P$ について, 線分 ab と cd が交差しており, $c, d \notin Lens(ab)$ とする. このとき, cd を ab の fan-crossing 辺と呼ぶ.

次の 2 つの補題は $ab \in MLG(P)$ の lens-crossing 辺における性質を示している.

補題 3.⁴⁾ 4 点 $a, b, c, d \in P$ について, 線分 cd が線分 ab の lens-crossing 辺であり, cd は $Up_Lens(pq)$ のみを通過するとする. このとき, $a \in Lens(cd)$ となる.

補題 4.⁴⁾ 辺 $ab \in MLG(P)$ について考える. このとき, $MLG(P)$ に含まれる辺は下記となる.

- (i) $Up_Lens(ab)$ のみを通過する ab の lens-crossing 辺は高々1 辺.
- (ii) $Low_Lens(ab)$ のみを通過する ab の lens-crossing 辺は高々1 辺.
- (iii) $Up_Lens(ab)$ と $Low_Lens(ab)$ の両方を通過する ab の lens-crossing 辺は存在しない.

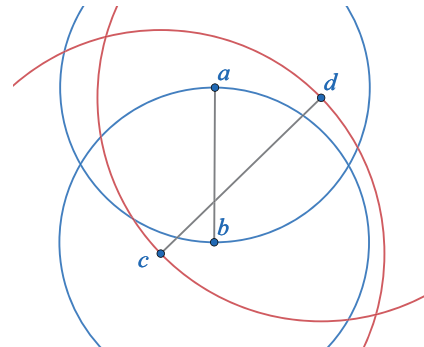


図 2 補題 4(iii)の状況

図 2 に補題 4(iii)の状況を示す. 補題 4 より, $MLG(P)$ は $ab \in MLG(P)$ について高々2 個の lens-crossing 辺を含むこととなる.

また, $ab \in MLG(P)$ の fan-crossing 辺について, 次の補題がある.

補題 5.⁴⁾ 辺 $ab \in MLG(P)$ について考える. このとき $MLG(P)$ に含まれる ab の fan-crossing 辺は高々4 本である.

本研究では, この補題の証明⁴⁾をもとに, 次章の補題 10 と 11 を示した.

ここで, $MLG(P)$ の交差数を $\sigma(P)$ とする. 補題 4 と 5 より, $MLG(P)$ の各辺は高々6 個の交点を持つこととなる. したがって $\sigma(P)$ は高々 $6 \times (2n - 3)/2$ となり, 下記の定理が成り立つ.

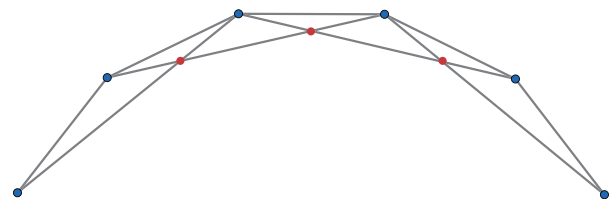


図 3 $|P| - 3$ 個の交点を持つ $MLG(P)$ (赤点が交点)

定理 1.⁴⁾ 任意の準一般的配置の頂点集合 P について、 $\sigma(P) \leq 6|P| - 9$ が成り立つ。

Bereg らは図 3 に示すような交差数が $|P| - 3$ となる頂点集合 P を示しており、このことから次の定理が成り立つ。

定理 2.⁴⁾ $\sigma(P) \geq |P| - 3$ となる準一般的配置の頂点集合 P が存在する。

さらに次の 2 つの補題を導入する。

補題 6.⁶⁾ 3 点 $a, b, c \in P$ が、 $\text{angle}_a(l, l') < 60^\circ$ かつ $b, c \in \text{Cone}_a(l, l')$ を満たすとする。このとき、 ab と bc のうち長い辺は $MST(P)$ に含まれない。

補題 7.⁴⁾ 4 点 $a, b, c, d \in P$ が、 $\text{angle}_a(l, l') < 60^\circ$ かつ $b, c, d \in \text{Cone}_a(l, l')$ を満たすとする。このとき、 ab, ac, ad のうち最長の辺は $MST(P)$ に含まれない。

3. $\sigma(P)$ の上界の改善

本研究では、定理 1 で示した $\sigma(P)$ の上界を改善した。以下では、 $\overline{MST}(P) = \overline{MLG}(P) \setminus MST(P)$ とする。初めに次の補題を示した。

補題 8. $a, b \in MST(P)$ について、fan-crossing 辺は存在しない。

さらに、次の補題を示した (図 4 に補題 9 の状況を示す)。

補題 9. 4 点 $a, b, c, d \in P$ について、 cd は ab の lens-crossing 辺であるとする。このとき、 ab は cd の fan-crossing 辺である。

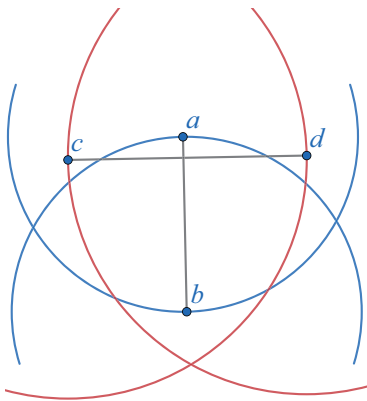
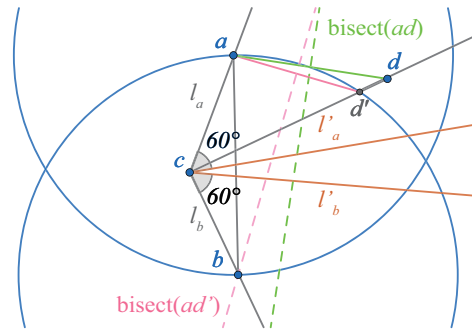


図 4 cd が $Up_Lens(ab)$ を通過して $Low_Lens(ab)$ は通過しない場合

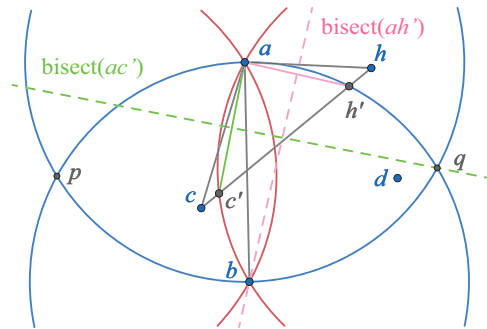
ここで、 $MLG(P)$ の交点を以下の 2 つに場合分けするため、次のように定義する。

定義 3. (f-f 交点, f-l 交点) 4 点 $a, b, c, d \in P$ について、2 線分 ab と cd が交差しているとする。

- (i) cd が ab の fan-crossing 辺であり、 ab が cd の fan-crossing 辺であるとき、 ab と cd の交点を **f-f 交点** と呼ぶ。
- (ii) cd が ab の fan-crossing 辺であり、 ab が cd の lens-crossing 辺であるとき、 ab と cd の交点を **f-l 交点** と呼ぶ。



(a)



(b)

図 5 (a) P の点が $Lens(ab)$ に 1 つの場合 (b) 2 つの場合

交点数を数え上げるために、次の 2 つの補題を示した。

補題 10. 辺 $ab \in \overline{MST}(P)$ について考える。 ab と $MLG(P)$ に含まれる ab の fan-crossing 辺の交点には、高々 2 個の f-l 交点が存在する。

補題 10 は P の点が $Lens(ab)$ に 1 つあるとき、2 つあるときに場合分けすることで示すことができる (図 5)。

次の補題 11 は補題 10 と同様に 2 つの場合に分けて示すことができる。

補題 11. 辺 $ab \in \overline{MST}(P)$ について、高々 1 個の fan-crossing 辺が $MST(P)$ に含まれる。

これらの補題を用いて、次の定理を示すことができる。

定理 3. 準一般的配置の点集合 P について、 $\sigma(P) \leq 2.5|P| - 5$ が成り立つ。

4. $\sigma(P)$ の下界の改善

本研究では、Bereg らが示した $MLG(P)$ の交点数よりも、より交点数の多い点集合 P の構築方法を明らかにした。

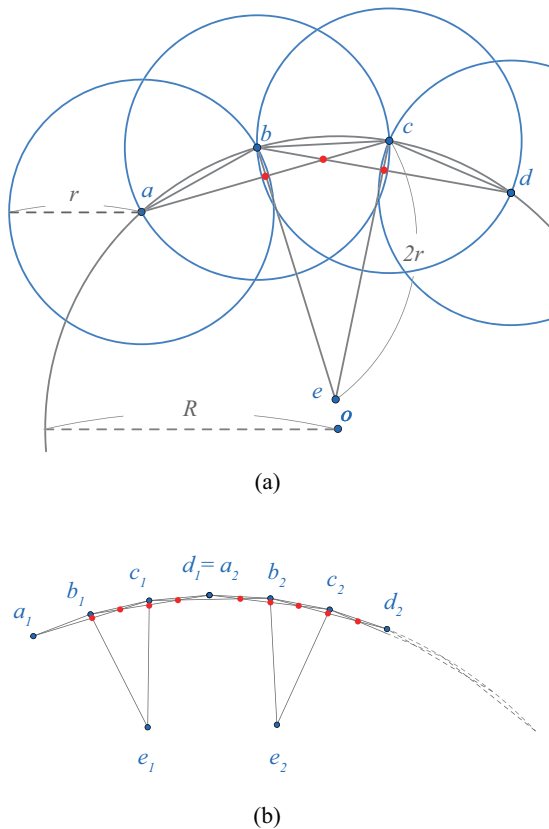


図 6 (a) 5 点の組を (o, R, r) (b) (o, R, r) を連結したもの

図 6(a) に示すような 5 点 $\{a, b, c, d, e\}$ を考える。ある 1 点を o 、2 つの正の実数を R, r とし、 a, b, c, d は $C_o(R)$ 上に、この順序で並べ、点 e は $be = cd = 2r$ となるような $D_o(R)$ 内に配置する。このような 5 点の組を (o, R, r) と表記することとする。ここで、このような点配置は準一般的配置ではないが、微小に配置を動かすことで準一般的配置にすることとする。

t を正の整数として、 (o, R, r) の組を t 倍することを考える。 a, b, c, d, e の i 番目のものをそれぞれ a_i, b_i, c_i, d_i, e_i とする (図 6(b))。このとき、以下の定理が成り立つ。

定理 4. 任意の $\epsilon > 0$ について $\sigma(P) \geq (1.25 - \epsilon)|P|$ を満たす準一般的配置の点集合 P が存在する。

5. 今後の課題

$MLG(P)$ の双対グラフを考えた際、その双対グラフに閉

路がないといった性質を示すことができれば、さらに上界を改善できる可能性がある。現在、Rhinceros を用いてインタラクティブに $MLG(P)$ を描画できる環境を構築し、検討している (図 7)。

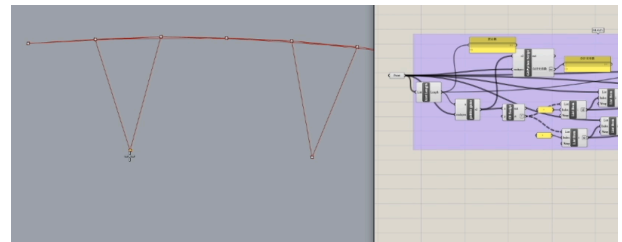


図 7 操作画面

【参考文献】

- 1) J. Graver, B. Servatius, and H. Servatius. Combinatorial Rigidity. Graduate Studies in Mathematics, vol. 2. American Mathematical Society, 1993.
- 2) G. Laman. On graphs and rigidity of plane skeletal structures. Journal of Engineering Mathematics, vol. 4:331-340, 1970.
- 3) 小林祐貴, 加藤直樹, 極小剛な空間充填立体 bar-joint フレームワークの生成手法及び建築形態デザインへの応用, 日本建築学会環境系論文集, vol. 83(745):323-331, 2018.
- 4) S. Bereg, S. -H. Hong, N. Katoh, S. -H. Poon, and S. Tanigawa. On the edge crossing properties of Euclidean minimum weight Laman graphs. Computational Geometry: Theory and Applications, vol. 51:15-24, 2016.
- 5) 吉山大雅, 小林祐貴, 東川雄哉, 加藤直樹, 最小重み Laman グラフの交差数の検証, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (東海), pp. 39-40, 2021.
- 6) A. C. Yao. On constructing minimum spanning trees in k-dimensional space and related Problems. SIAM Journal on Computing, vol. 11(4):721-736, 1982.