

勾配法と逐次二次計画法によるシェルの形状・板厚分布・位相最適化 Shape, Thickness Distribution, and Topology Optimization of a Continuum Shell using the Gradient Method and Sequential Quadratic Programming

○渡辺 哲平*¹, 藤田 慎之輔*²
Teppei WATANABE*¹, Shinnosuke FUJITA*²

*1 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 大学院生

Graduate Student, Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu

*2 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 准教授

Assoc. Prof., Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu, Dr. Eng.

キーワード : シグモイド関数; トポロジー最適化; シェル構造物

Keywords : Sigmoid function; topology optimization; shell structure.

1. 序論

シェルの形状や板厚分布は、力学的性能を大きく左右するため、近年では、それらを設計変数とした最適化問題を定式化し、構造最適化によって高い力学的性能を有する形状や板厚分布を獲得する研究が行われている。形状と板厚分布を直接的に設計変数として扱うと計算速度の低下や解の発散を招く恐れがあるため、パラメトリック曲面により離散化する手法が提案されている¹⁾。また、板厚分布最適化において節点板厚にシグモイド関数を乗じたトポロジー最適化手法も提案されている²⁾。既往の研究では、トラス構造物の材料非線形解析や平面骨組みの幾何学的非線形解析に対して、剛性方程式を解く代わりに全ポテンシャルエネルギー最小化問題を解く数値実験が行われ、有効性が示されている³⁻⁵⁾。剛性方程式を直接解く方法は、線形問題の場合には剛性方程式を1度解くだけで解が得られるが、板厚が消失する場合においては、行列が特異になることが考えられる。一方、ポテンシャルエネルギーを最小化する方法は、線形方程式を直接解く代わりに、行列・ベクトル積の反復によって解が得られるため本研究の最適化問題に適した解法であると考えられる。本研究では、形状と板厚分布をBスプラインで離散化した上でシグモイド関数を板厚に乗じることで、連続最適化問題として定式化し、連続体シェル構造物に対して剛性方程式を解く代わりに全ポテンシャルエネルギー最小化問題を解き、形状と板厚分布、トポロジーの同時最適化を行う。さらに、全ポテンシャルエネルギー最小化問題を複数の勾配法で解き、アルゴリズムの違いによる解の収束性について考察する。

2. 設計問題の定式化

シェルの節点座標は $(I+1) \times (J+1)$ の制御ネットを有するBスプライン曲面により離散化するものとする。加えて、各節点における板厚値もBスプライン曲面により離散化する。各制御点の x 座標を並べたベクトルを \mathbf{q}_x 、 y 座標を並べたベクトルを \mathbf{q}_y 、形状に関する制御点の鉛直方向座標を並べたベクトルを \mathbf{q}_z 、板厚に関する制御点の鉛直方向座標を並べたベクトルを \mathbf{q}_t とおく。

$$\mathbf{q}_x = (q_{x,00} \quad \cdots \quad q_{x,0J} \quad \cdots \quad q_{x,I0} \quad \cdots \quad q_{x,IJ})^T \quad (1a)$$

$$\mathbf{q}_y = (q_{y,00} \quad \cdots \quad q_{y,0J} \quad \cdots \quad q_{y,I0} \quad \cdots \quad q_{y,IJ})^T \quad (1b)$$

$$\mathbf{q}_z = (q_{z,00} \quad \cdots \quad q_{z,0J} \quad \cdots \quad q_{z,I0} \quad \cdots \quad q_{z,IJ})^T \quad (1c)$$

$$\mathbf{q}_t = (q_{t,00} \quad \cdots \quad q_{t,0J} \quad \cdots \quad q_{t,I0} \quad \cdots \quad q_{t,IJ})^T \quad (1d)$$

節点数を n 、要素数を m とし、節点座標ベクトル \mathbf{r} ならびに節点における板厚値(節点板厚)を並べたベクトル \mathbf{t} を次式で定義する。

$$\mathbf{r} = (\mathbf{x} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{z}) \quad (2a)$$

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad \cdots \quad x_n)^T \quad (2b)$$

$$\mathbf{y} = (y_1 \quad \cdots \quad y_n)^T \quad (2c)$$

$$\mathbf{z} = (z_1 \quad \cdots \quad z_n)^T \quad (2d)$$

$$\mathbf{t} = (t_1 \quad \cdots \quad t_n)^T \quad (3)$$

このとき、節点座標並びに節点板厚は次式のように離散化される。

$$x_k = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J q_{x,ij} \mathbf{B}_{i,N}(u_k^s) \mathbf{B}_{j,M}(v_k^s), \quad k = 1, \dots, n \quad (4a)$$

$$y_k = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J q_{y,ij} \mathbf{B}_{i,N}(u_k^s) \mathbf{B}_{j,M}(v_k^s), \quad k = 1, \dots, n \quad (4b)$$

$$z_k = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J q_{z,ij} \mathbf{B}_{i,N}(u_k^s) \mathbf{B}_{j,M}(v_k^s), \quad k = 1, \dots, n \quad (4c)$$

$$t_k = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J q_{t,ij} \mathbf{B}_{i,N}(u_k^s) \mathbf{B}_{j,M}(v_k^s), \quad k = 1, \dots, n \quad (5)$$

ここで (u_k^s, v_k^s) は k 番目の節点の節点座標に対応したパラメータ, $\mathbf{B}_{i,N}(u)$ は u 方向の N 次の B スプライン基底関数であることを表す。

板厚が非常に小さい値をとった場合, 実際の施工を行うことは困難になることを防ぐため, 節点板厚に閾値 \bar{t}_{\min} を設け, \bar{t}_{\min} を下回る際にはシェル形状に開口部を開けることを考える。このとき, 節点板厚は次のように表される。

$$p^t_k = \begin{cases} t_k & \text{if } t_k \geq \bar{t}_{\min} \\ 0 & \text{if } t_k < \bar{t}_{\min} \end{cases} \quad k = 1, \dots, n \quad (6)$$

本研究で用いる有限要素解析は要素内で板厚は一定であり, 節点板厚は定義されない。そこで, 節点板厚の平均値を次のように定義し, 有限要素の要素板厚として用いることを考える。

$$t_e = \frac{p^t_{e^i} + p^t_{e^j} + p^t_{e^k}}{3} \quad e = 1, \dots, m \quad (7)$$

e^i, e^j, e^k は要素 e の頂点における節点番号であり, $p^t_{e^i}, p^t_{e^j}, p^t_{e^k}$ は e^i, e^j, e^k に対応する節点板厚である。しかし, 式 (6) は $t_e = \bar{t}_{\min}$ で不連続となるため, 感度解析を行うことができない。そこで, 式 (6) にシグモイド関数を乗じたものを節点板厚として定義する。

$$t_e^s = \frac{t_e}{1 + \exp\{\alpha(\bar{t}_{\min} - t_e)\}} \quad (8)$$

本研究では, 設計変数 \mathbf{X} に \mathbf{q}_z ならびに \mathbf{q}_t をとり, 以下の最適化問題を解くことでシェルの板厚分布最適化, シェルの形状と板厚分布の同時最適化を行う。最適化計算には pyOpt⁶⁾ を用い, 逐次二次計画法により解く。

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{X}}{\text{minimize}} && f = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \\ & \text{subject to} && V_{\min} \leq V \leq \bar{V} \\ & && \mathbf{r}^* = \mathbf{r}_{\text{ini}}^* \\ & && \bar{t}_{\min} \leq t_e^s \leq \bar{t}_{\max} \quad e = 1, \dots, m \\ & && \bar{q}_{z,\max} \leq q_{z,ij} \leq \bar{q}_{z,\max} \quad i = 0, \dots, I \\ & && \bar{q}_{t,\max} \leq q_{t,ij} \leq \bar{q}_{t,\max} \quad j = 0, \dots, J \\ & \text{if } \mathbf{X} = \mathbf{q}_z && \dots \text{形状最適化} \\ & \text{if } \mathbf{X} = \mathbf{q}_t && \dots \text{板厚分布最適化} \\ & \text{if } \mathbf{X} = (\mathbf{q}_z^T \quad \mathbf{q}_t^T)^T && \dots \text{同時最適化} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, \mathbf{u} は節点変位ベクトル, \mathbf{K} は線形弾性行列である。シェルの V は総体積, \bar{V}, V_{\min} は体積の上下限值, \mathbf{r}^* は支持点の節点座標ベクトル, $\mathbf{r}_{\text{ini}}^*$ は \mathbf{r}^* の初期値である。 $\bar{t}_{\min}, \bar{t}_{\max}$ は要素板厚の上下限值, $\bar{q}_{z,\min}, \bar{q}_{z,\max}, \bar{q}_{t,\min}, \bar{q}_{t,\max}$ は設計変数の上下限值である。

ここで, 外力ベクトルを \mathbf{p} とし, 節点変位ベクトルを求めることを考える。剛性方程式と全ポテンシャルエネルギーの最小化問題を, それぞれ式 (11) と式 (12) に示す。

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (11)$$

$$\underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} \quad f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{p}^T \mathbf{u} \quad (12)$$

式 (11) を解くことと式 (12) を解くことは等価である。式 (11) において $t_e^s = 0$ で剛性マトリクスが特異になるため式 (12) を用いて節点変位ベクトルを求める。

3. 数値解析例

3.1. 解析概要

一辺が 30m の正方形平面を有するライズ 10m の裁断球殻シェルを考える (図 1)。境界条件は図中に ● で表した四点を固定支持とする。形状並びに板厚分布はいずれも 3 次の B スプラインにより離散化し, 制御点は 6×6 格子状に 36 個配置する ($I = J = 5$)。節点数は $n = 121$, 要素分割は $m = 200$ とする。外力は自重として 24 kN/m^3 を作用させる。材料はコンクリートを想定する。初期のシェル厚は一様に 0.2 m とする。図中の f_{ini}, V とした値は, 初期形状におけるひずみエネルギーと体積を示す。本研究では, 解析モデルに対して CG 法, NewtonCG 法, 加速勾配法⁷⁾ の 3 つの勾配法を式 (12) に適用し, 収束性能の考察を行う。CG 法, NewtonCG 法については python の科学技術計算ライブラリである scipy⁸⁾ を用いる。

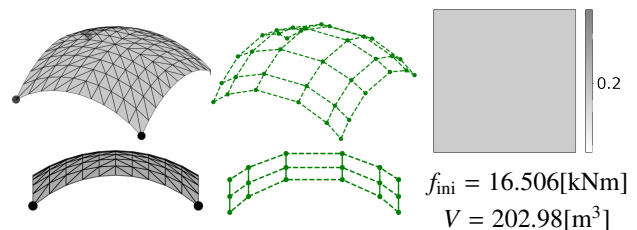


図 1 解析モデル

3.2. 板厚分布・位相最適化

$\mathbf{X} = \mathbf{q}_t, \bar{q}_{t,\min} = -3 \text{ m}, \bar{q}_{t,\max} = 5 \text{ m}, \bar{t}_{\max} = 0.5 \text{ m}, \alpha = 500, V_{\min} = 0.8 \bar{V}, \bar{V} = 202.98 \text{ m}^3$ とし問題 (9) を解いて得られた板厚分布最適解を図 2, 図 3, 図 4 に示す。図中の f

として表した値は、最適解におけるひずみエネルギーを示す。

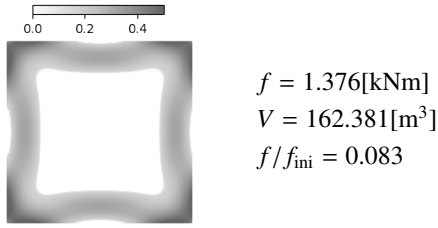


図2 最適板厚分布 (CG 法)

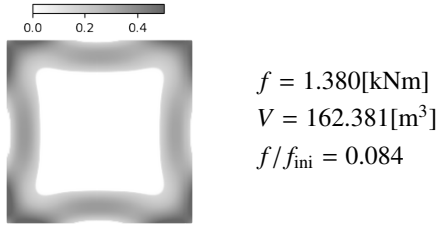


図3 最適板厚分布 (NewtonCG 法)

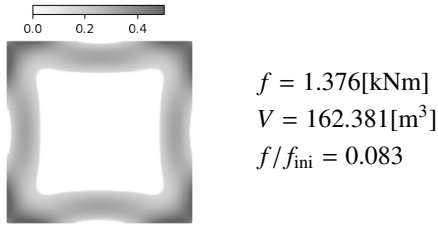


図4 最適板厚分布 (加速勾配法)

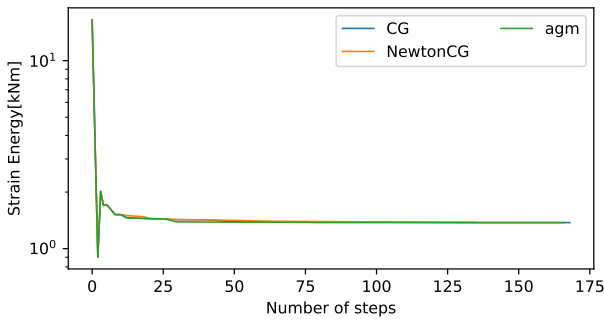


図5 勾配法の違いによるひずみエネルギーと step 数の関係

板厚分布最適化結果(図2, 図3, 図4)から、支持点近傍の板厚を厚くし、支持点から最も離れた場所であるシェル中央部分の板厚が消失することで外力による曲げモーメントを小さくし、ひずみエネルギーを減少させていることが確認できる。ひずみエネルギーは初期形状と比べて90%以上減少した。勾配法の違いにかかわらず、概ね同様の板厚分布が得られた。また、ひずみエネルギーも概ね一致している。

3.3. 同時最適化結果

$X = (q_z^T \quad q_t^T)^T$, $\bar{q}_{z,\min} = -30\text{m}$, $\bar{q}_{z,\max} = 30\text{m}$, $\bar{q}_{t,\min} = -3\text{m}$, $\bar{q}_{t,\max} = 5\text{m}$, $\bar{t}_{\max} = 0.5\text{m}$, $\alpha = 500$, $V_{\min} = 0.8\bar{V}$, $\bar{V} = 202.98\text{m}^3$ として問題(9)を解いて得られた最適化結果を図6, 図7, 図8に示す。

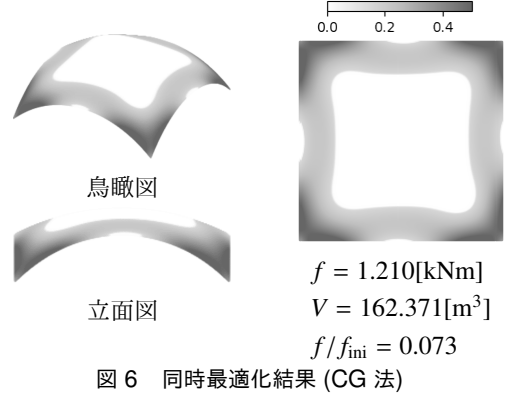


図6 同時最適化結果 (CG 法)

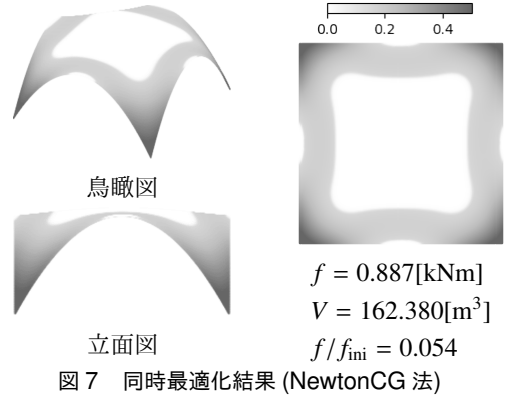


図7 同時最適化結果 (NewtonCG 法)

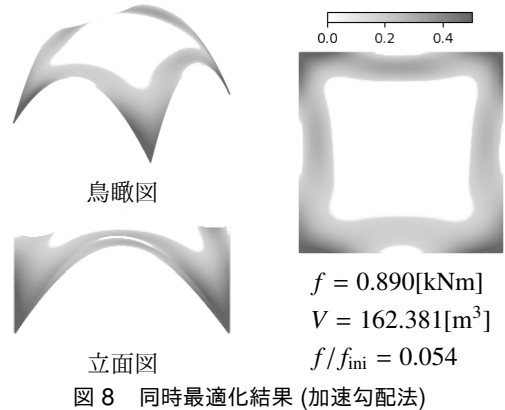


図8 同時最適化結果 (加速勾配法)

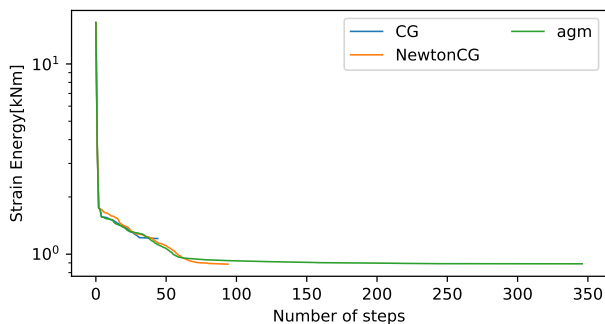


図9 勾配法の違いによるひずみエネルギーとstep数の関係

同時最適化結果(図6, 図7, 図8)から, シェルのライズがカタナリ状に上がり, 支持点近傍の板厚を厚く, 支持点から最も離れた場所であるシェル中央部分の板厚が消失することでひずみエネルギーを減少させていることが確認できる. NewtonCG法, 加速勾配法を用いて全ポテンシャルエネルギー最小化問題を解くと, 最適化結果において概ね同様のシェル形状, 板厚分布, ひずみエネルギーが得られる. 一方, CG法を用いた場合, シェルのライズが低くひずみエネルギーが大きな解が得られた. ひずみエネルギーとstep数の関係(図5, 図9)から, 全ポテンシャルエネルギー最小化問題に用いる勾配法によらず, 収束性能に大きな差異が無いことが分かる.

4. 結言

本研究では, 形状と板厚分布をBスプラインで離散化した上でシグモイド関数を板厚に乗じることで, 連続最適化問題として定式化し, シェルの形状・板厚・位相最適化問題を解いた. また, 剛性方程式を解く代わりに全ポテンシャルエネルギー最小化問題として定式化し, CG法, NewtonCG法, 加速勾配法の3つの勾配法を適用し, 目的関数性能と収束性能の比較を行った. 研究結果は次のようにまとめられる.

- 板厚にシグモイド関数を乗じたものを要素板厚とすることで, 閾値以下の板厚は削除するという離散最適化問題を連続最適化問題に近似し, 逐次二次計画法によって解くことができる.
- 全ポテンシャルエネルギー最小化問題として定式化し, 節点変位ベクトルを求めることで, 行列の特異化を防ぎ, 概ね優良解が得られる.
- 板厚分布最適化の場合, 勾配法の違いにかかわらず, 概ね同様の板厚分布が得られる.
- 同時最適化の場合, 全ポテンシャルエネルギー最小化問題にCG法を用いると十分な収束性能がななく優良解が得られない.

今後の展望として, 積載荷重の考慮が挙げられる. 板厚が消失した範囲は自重は0となるが, 積載荷重は一定値を取るためそのままでは変位が増大し構造的に不利となることから, 積載荷重を考慮した状態で本手法をそのまま適用すると開口部を作り出すことができなくなると考えられる. 今後は積載荷重も考慮可能な形に本手法を改良していきたい.

【参考文献】

- 1) 木村俊明, 大森博司. 形状と厚さの同時最適化法の定式化とその応用-自由曲面シェル構造の構造形態創生手法の提案(その1)-. 日本建築学会構造系論文集, Vol. 74, No. 640, pp. 1091-1098, 2009.6.
- 2) 藤田慎之輔, 寒野善博. シグモイド関数を用いたシェル構造物の形状・板厚・位相同時最適化. 日本機械学会論文集, Vol. 85, No. 872, pp. 18-00160, 2019.4.
- 3) Y.Kanno. Accelerated proximal gradient method for elastoplastic analysis of large-scale trusses. *Proceedings of OPTIS 2016 (Japan Society of Mechanical Engineers)*, Vol. No.1213, , 2016.1.(in Japanese).
- 4) Y.Kanno S.Fujita and M.Ohsaki. Accelerated gradient method for geometrically nonlinear analysis of framed structures. *Proceedings of OPTIS 2016 (Japan Society of Mechanical Engineers)*, Vol. No.1212, , 2016.1.(in Japanese).
- 5) Y.Kanno. Accelerated proximal gradient method for equilibrium analysis of elastoplastic spatial truss structures. IASS Annual Symposium - Spatial Structures in the 21st Century, 2019.6.
- 6) R. E. Perez, P. W. Jansen, and J. R. R. A. Martins. pyopt: a python-based object-oriented framework for nonlinear constrained optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 45, No. 1, pp. 101-118, 2012.1.
- 7) S.Fujita and Y.Kanno. Application of accelerated gradient method to equilibrium analysis of trusses with nonlinear elastic materials.j. struct. constr. eng. *AIJ*, Vol. 84, No. 763.
- 8) Pauli Virtanen, Ralf Gommers, Travis E. Oliphant, Matt Haberland, Tyler Reddy, David Cournapeau, Evgeni Burovski, Pearu Peterson, Warren Weckesser, Jonathan Bright, Stéfan J. van der Walt, Matthew Brett, Joshua Wilson, K. Jarrod Millman, Nikolay Mayorov, Andrew R. J. Nelson, Eric Jones, Robert Kern, Eric Larson, C J Carey, Ilhan Polat, Yu Feng, Eric W. Moore, Jake VanderPlas, Denis Laxalde, Josef Perktold, Robert Cimrman, Ian Henriksen, E. A. Quintero, Charles R. Harris, Anne M. Archibald, António H. Ribeiro, Fabian Pedregosa, Paul van Mulbregt, and SciPy 1.0 Contributors. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, Vol. 17, pp. 261-272, 2020.