

外力に対するロバスト性を考慮したトラス構造物の最適化

修正 PSO の多目的最適化問題への応用

Optimization of Truss Structures considering Robustness to Load

Application of modified PSO to multi-objective optimization problem

○曾我部 博之*
Hiroyuki SOGABE*

* 愛知工業大学工学部建築学科 教授 工博

Professor, Department of Architecture, Faculty of Engineering, Aichi Institute of Technology, Dr. Eng.

Summary: In order to ensure the stable performance and quality of structures, it is important to design structures with properties that are not easily affected by uncertain design parameters, so-called robust properties. This paper discusses a multi-objective optimization problem for truss structures subjected to uncertain loads by introducing a robust index to describe the robust performance. The objective function in this problem is the weight and robustness index of the truss structure, and the member cross-section and topology are optimized under stress constraints. Recently, Particle Swarm Optimization (PSO) is often used in engineering as an algorithm to search for optimal solutions, but it has been pointed out that the search performance of conventional PSO is greatly degraded when the objective function is multimodal or the design variables are high-dimensional. This paper applies the single-objective mPSO (modified PSO) proposed by the author to a multi-objective optimization problem and shows that it improves the search performance over conventional PSO. Furthermore, the robustness of the Pareto-optimal truss structure obtained by mPSO is investigated by running numerical experiments using the Monte Carlo method.

キーワード: ロバスト性; 多目的最適化; トラス構造; 位相最適化; 粒子群最適化

Keywords: Robustness; multiple objective optimization; truss structures; topology optimization; PSO.

1. はじめに

最適化問題における設計パラメータには不確定さが内在することから、求められた最適解が必ずしも実際の最適解になるとは限らない。構造物の性能や品質を常に安定して確保するためには、不確定なパラメータに影響され難い性質、すなわちロバストな性質を持った最適解を選択することが重要である。

構造物におけるロバスト性については、ロバスト構造の概念を示した山川等りの研究をはじめ、ロバスト性を考慮したトラス構造物の位相最適化に関する研究²⁻⁵⁾、さらに連続体の形態創生においてロバスト性を考慮した研究⁶⁻⁸⁾が報告されている。また、骨組構造物の重量とロバスト性を目的関数にした多目的な最適塑性設計^{9,10)}が、著者によって報告されている。

本論はロバスト性を評価するロバスト指標を導入し、不確定な荷重を受けるトラス構造物の多目的最適化問題について述べる。目的関数はトラスの重量（体積）と平均コンプライアンスの感度（ロバスト指標の逆数）とし、応力制約下における部材の断面最適化と位相最適化を行う。2つの目的関数はトレードオフの関係にあることからパレート最適解の集合を求める問題となるが、本論ではこれらの最適解を探索するアルゴリズムとして、粒子群最適化法¹¹⁾

(PSO: Particle Swarm Optimization) を僅かに修正した mPSO (modified PSO)¹²⁾を用いる。PSO はアルゴリズムが非常に単純であること、さらには目的関数の勾配情報が不要であることなどからさまざまな工学分野で利用されている。しかしながら、目的関数が多峰性となる場合や設計変数が高次元となる場合の最適化問題に対しては、最適解を探索する性能が大きく低下することが指摘されている。このような問題を改善するために、著者は粒子の軌道を僅かに修正した mPSO を提案し、単目的のベンチマーク問題や構造最適化問題に適用することによって本手法の有効性を示した。

本論では単目的用の mPSO を応用して多目的なロバスト最適化問題に適用し、トラス構造物のロバスト性について考察する。さらに、モンテカルロ法による数値実験を行うことによってロバスト指標の信頼性についても検証する。

2. 外力に対するロバスト性

2.1. ロバスト性を表す指標

本論では、ロバスト性を表す指標 R を不確定な入力パラメータ p の分散 $Var[p]$ と特性値 z の分散 $Var[z]$ の比で次のように定める。

$$R^2 = \frac{Var[p]}{Var[z]} \quad (1)$$

上式のロバスト指標 R は、入力パラメータ p のばらつきによって特性値 z がどのようにばらつくかを示す量である。ロバスト指標が大きければ、特性値のばらつきが小さいことを表し、逆にロバスト指標が小さければ、特性値のばらつきが大きいことを表している。

2.2. 平均コンプライアンスのロバスト指標

トラス内部の 1 つの節点 k に作用する不確定な荷重 $F^{(k)}$ を入力パラメータとし、平均コンプライアンス C をトラスの特性値すると、式(1)のロバスト指標 R は次のように求められる。

$$R = \sqrt{\frac{\text{Var}[F^{(k)}]}{\text{Var}[C]}} = \left| \frac{\partial C}{\partial F^{(k)}} \right|^{-1} \quad (2)$$

ここで、一次近似二次モーメント法¹³⁾による次の関係式を用いた。

$$\text{Var}[C] = \left(\frac{\partial C}{\partial F^{(k)}} \right)^2 \text{Var}[F^{(k)}] \quad (3)$$

さらに、トラス構造物の平均コンプライアンス C は、次式のように与えられる。

$$C = \sum_{i,j}^{n_p} K_{ij}^{-1} F_i F_j \quad (4)$$

ここで、 K_{ij} はトラス構造物の全体剛性マトリックス成分であり、 F_i は全体座標系における荷重ベクトル成分である。平面トラスの場合、荷重は節点毎に 2 つの成分があることから n_p は節点数の 2 倍となる。式(2)における平均コンプライアンス C の感度の大きさ S は、式(4)より次のように求めることができる。

$$S = \left| \frac{\partial C}{\partial F^{(k)}} \right| = \left| \sum_i^{n_p} (K_{(k)i}^{-1} + K_{i(k)}^{-1}) F_i \right| = |2U_{(k)}| \quad (5)$$

ここで、 $U_{(k)}$ は全体座標系における荷重点 k の変位ベクトル成分である。

3. 多目的最適化問題の定式化

本論におけるトラス構造物の多目的最適化問題は、設計変数を部材の断面積 A_i とし、重量 W と平均コンプライアンスの感度の大きさ S を応力制約条件下で最小化する問題として、次のように定式化することができる。

$$\begin{aligned} \min \quad & W = \sum_{i=1}^{n_m} \rho A_i \ell_i \\ \min \quad & S = \frac{1}{R} = |2U_{(k)}| \\ \text{subject to} \quad & |\sigma_i| \leq \sigma_a \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 ρ は密度、 ℓ_i は部材長さ、 n_m は部材数である。さらに、 σ_i は部材の応力度、 σ_a は許容応力度である。応力度の制約条件は上下限値 σ_a のみで、トラス部材の座屈は考慮していない。なお、トラスの重量 W は式(6)より部材の断面積

A_i に比例し、感度 S は式(5)より剛性マトリックス内の断面積 A_i に逆比例する。したがって、2 つの目的関数はトレードオフの関係になり、この最適化問題ではパレート最適解の集合を求めることが必要になる。

さらに、式(6)の制約条件付きの多目的最適化問題を次式のように制約条件のない形式に置き換える。

$$\left. \begin{aligned} \min \quad & f_1 = \alpha W + \sum_{i=1}^{n_m} \lambda_i \sqrt{\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_a} \right)^2} \\ \min \quad & f_2 = \beta S + \sum_{i=1}^{n_m} \lambda_i \sqrt{\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_a} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

上式(7)における λ_i は、

$$\lambda_i = \begin{cases} 0 & (\sigma_i^2 \leq \sigma_a^2) \\ 1 & (\sigma_i^2 > \sigma_a^2) \end{cases} \quad (8)$$

と与え、係数 α 、 β は 2 つの目的関数 f_1 、 f_2 が制約条件を満足した場合に概ね 1 となるように設定した。

4. 最適化手法

4.1. mPSO の概要

mPSO は通常の PSO と同様に位置、速度及び評価値の情報を持つ複数の粒子が、探索空間を運動することによって最適解の近似解を求める手法である。各粒子の運動は、以下の漸化式を繰り返すことによって行われる。

$$\left. \begin{aligned} v_j^i(t+1) &= w v_j^i(t) + c r^i(t) (gbest_j(t) - x_j^i(t)) \\ &\quad + c r^i(t) (pbest_j^i(t) - x_j^i(t)) \\ x_j^i(t+1) &= x_j^i(t) + v_j^i(t+1) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、 $x_j^i(t)$ 、 $v_j^i(t)$ は、それぞれ粒子の位置ベクトル、速度ベクトルであり、各添え字はステップ t における粒子 i ($i=1 \sim m$) の j ($j=1 \sim n$) 成分を表している。さらに、 $gbest_j(t)$ はステップ t における粒子全体の最良解を表し、 $pbest_j^i(t)$ はステップ t における粒子 i 自身の最良解を表している。また、 w は慣性係数、 c は学習係数、 r^i は区間 $[-1, 1]$ の一様乱数である。漸化式(9)を既定回数だけ繰り返したときの $gbest_j(t_{\max})$ が最適解となる。

本手法の mPSO と通常の PSO との主な違いは、式(9)の学習係数 c にかかる一様乱数 r の取り方とその範囲にある。mPSO では粒子毎に乱数を生成しているだけであるのに対し、通常の PSO では粒子毎として式(9)の右辺の 2 項目、3 項目のベクトル成分毎に乱数を生成し変更している。さらに、一様乱数の範囲は mPSO で $[-1, 1]$ であるのに対し、PSO では $[0, 1]$ としている。両者の粒子の挙動を 2 次元の場合で模式的に Fig.1 に示す。この図で示すように、mPSO では設計変数に対応する位置ベクトル $x_j^i(t)$ を線分 CE 内で探索するのに対し、通常の PSO では平行四辺形 ABCD 内を探索している。すなわち、設計変数の多い高次元の最適化

問題に対しても、常に1次元空間を探索する mPSOの方が、最適解に接近しやすいといえる。さらに、mPSOでは一様乱数が負になると粒子の運動が不安定になることから、局所解に陥った場合でも抜け出して大域的な探索を継続することができる。すなわち、多峰性の目的関数を持つ最適化問題に対しても、mPSOの方が有利になる。

4.2. 多目的最適化問題における mPSO

単目的の最適化問題に mPSO を適用する場合、ステップ毎の最良解 $gbest_j(t)$ と $pbest_j^i(t)$ は、目的関数を評価することによってそれぞれ1つに定めることができる（最小の目的関数値が同じ場合はランダムに決定）。しかしながら、多目的な最適化問題では、一般的に解がパレート最適解の集合になることから、最良解の粒子もそれぞれ複数存在することになる。本論では、これらの最良解を Coello 等¹⁴⁾によって提案された MOPSO (Multi-Objective PSO) に基づいて、以下のように定めた。

(1) $gbest_j(t)$ の更新

ステップ t における粒子群（粒子数 m ）の位置ベクトル $x_j^i(t)$ からパレート最適解を抽出しアーカイブを作成する。さらに、前ステップ $t-1$ のアーカイブと併せてパレート最適解を更新する。Fig.2 はアーカイブにおけるパレート最適解の集合を目的空間上に示したものである。

次に、アーカイブの2つのパレート最適解 $(f_{1\max}, f_{2\min})$, $(f_{1\min}, f_{2\max})$ から、Fig.2 のように分割数 d_a で均等に分割された空間内の粒子数 m_a を求める。最適解はパレートフロント上に均一に得られることが望ましいことから、疎な空間の粒子が選ばれ易いように、 $1/m_a$ を適応度にしてルーレット選択を行う。さらに、選択された空間内に複数の粒子が存在する場合には、ランダムに1つの粒子を選んで $gbest_j(t)$ に設定した。

なお、アーカイブの粒子数が、予め設定された最大粒子数を超えた場合には、アーカイブの中の隣り合う粒子の距離を計算し、近接している順に粒子を削除する。

(2) $pbest_j^i(t)$ の更新

ステップ t における粒子 i の目的関数 $f_k(x_j^i(t))$ と前ステップ $t-1$ における $pbest_j^i(t-1)$ の目的関数 $f_k(pbest_j^i(t-1))$ を比較して、 $f_k(x_j^i(t)) < f_k(pbest_j^i(t-1))$ となっていれば $pbest_j^i(t-1)$ を更新する。

5. ロバスト性を考慮した断面最適化問題

5.1. 計算モデル

Fig.3 に示す節点数6、部材数10のトラス構造物における断面最適化問題について考える。各部材の材料特性は、ヤング係数を $E=69.0\text{kN/mm}^2$ 、密度を $\rho=2.77 \times 10^{-6}\text{ kg/mm}^3$ 、許容応力度を $\sigma_a=172\text{N/mm}^2$ とした。さらに、部材断面積の最小値及び最大値をそれぞれ $A_{\min}=1.00 \times 10^3\text{mm}^2$, $A_{\max}=2.20 \times 10^4\text{mm}^2$ と設定した。なお、この計算モデルは参考文献15) から荷重だけを変更して引用したものである。

mPSOのパラメータは、慣性係数を $w=0.7$ 、学習係数を

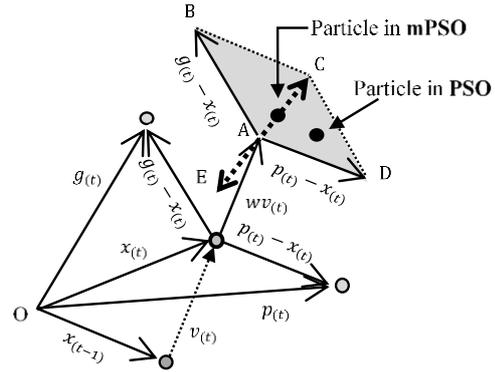


Fig.1 Behavior of particles in mPSO and PSO

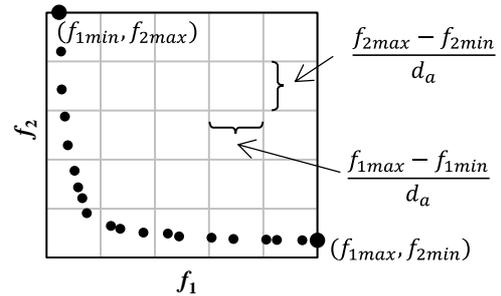


Fig.2 Objective space

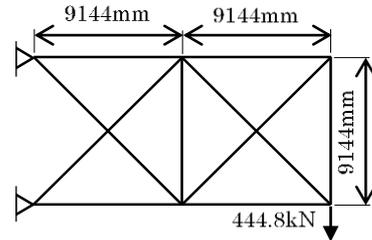


Fig.3 Truss with 10 members

$c=1.0$, 粒子数を $m=100$, 繰り返し回数を $t_{\max}=1000$, アーカイブの最大粒子数を $m_{\max}=100$, アーカイブの分割数を $d_a=20$ と設定した。

5.2. 計算結果

Fig.4 はパレート最適解の収束状況で、アーカイブにおけるパレート最適解 f_1^i, f_2^i の近傍距離 d_i の平均値 d_{Avg} と標準偏差 d_{SD} を次式のように定義して、ステップ毎に示したものである。

$$d_{\text{Avg}} = \frac{1}{m_a} \sum_{i=1}^{m_a-1} d_i \quad (10)$$

$$d_{\text{SD}} = \sqrt{\frac{1}{m_a} \sum_{i=1}^{m_a-1} (d_i - d_{\text{Avg}})^2} \quad (11)$$

$$d_i = \sqrt{(f_1^{i+1} - f_1^i)^2 + (f_2^{i+1} - f_2^i)^2} \quad (12)$$

ここで、 m_a はアーカイブにおけるパレート最適解の個数である。パレート最適解の近傍距離の平均値は少ないステップで収束するのに対し、近傍距離の標準偏差は多くのステップが必要になっている。これは、パレートフロントが少ない繰り返し回数で得られるのに対し、パレート最適解の集合を均一に得るためには、より多くの繰り返し回数が必要になることを示している。

次に、mPSOの探索性能を通常のPSOと比較して検証する。Fig.5はパレート最適解における重量 W に対する平均コンプライアンスの感度 S を示したものである。さらに、Table1は50回の試行計算を実行して得られたパレート最適解の個数 m_a と式(10)、(11)における近傍距離の平均値 d_{Avg} と標準偏差 d_{SD} の統計量を示したものである。パレート最適解の個数はどちらも指定した個数 m_{max} に到達しているが、パレート最適解の近傍距離の平均値 Avg は、mPSOが通常のPSOより大きくなっている。これは、Fig.5で表されているように、mPSOがパレート最適解を広範囲に探索しているためである。逆に、近傍距離の標準偏差 SD はmPSOが小さくなっているが、これはmPSOがパレート最適解の集合を均一に求めているためである。このようにmPSOの特長は、パレート最適解の集合を広範囲にしかも均一に求められることにある。

本手法によって得られたパレート最適解のトラスを2つ選んでFig.6に示す。図中の数値は各部材の断面積である。さらに、2つのトラスの重量 W 、平均コンプライアンス C 、ロバスト指標 R をTable2に示す。Fig.6(a)は重量 W 及びロバスト指標 R が最小となるトラスで、同図(b)は重量 W 及びロバスト指標 R が最大となるトラスを示したものである。この最適化問題では、全ての部材断面が最大($2.20 \times 10^4 \text{ mm}^2$)であるときにロバスト性が最も高くなっているが、これは式(2)及び式(5)で示されるように部材断面の増加に伴ってロバスト指標 R も増加するためである。

6. ロバスト性を考慮した位相最適化問題

6.1. 計算モデル

Fig.7に示す節点数35、部材数170のグランドストラクチャーにおける位相最適化問題について考える。各部材の材料特性は、ヤング係数を $E=200\text{kN/mm}^2$ 、許容応力度を $\sigma_a=200\text{N/mm}^2$ 、密度を $\rho=1$ (式(6)、(7)における W を体積 V に置き換える)とする。さらに、部材断面の最小値、最大値をそれぞれ $A_{min}=1.0 \times 10^{-5} \text{ mm}^2$ 、 $A_{max}=1.0 \times 10^2 \text{ mm}^2$ とした。なお、部材の配置は上下対称としたことから、設計変数の次元数は88となる。mPSOのパラメータは、慣性係数を $w=0.7$ 、学習係数を $c=1.0$ 、粒子数を $m=100$ 、繰り返し回数を $t_{max}=10000$ 、アーカイブの最大粒子数を $m_{max}=100$ 、アーカイブの分割数を $d_a=20$ とした。

6.2. 計算結果

Fig.8は、本手法で得られたパレート最適解を表したもので、トラスの体積 V に対する平均コンプライアンスの感度

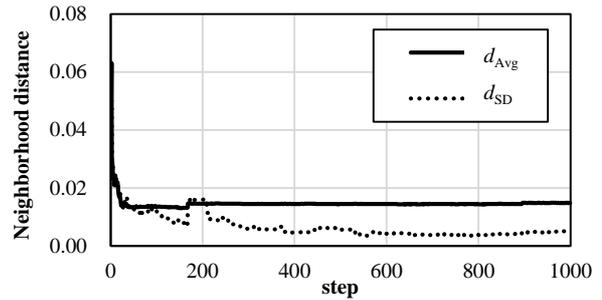


Fig.4 Convergence histories

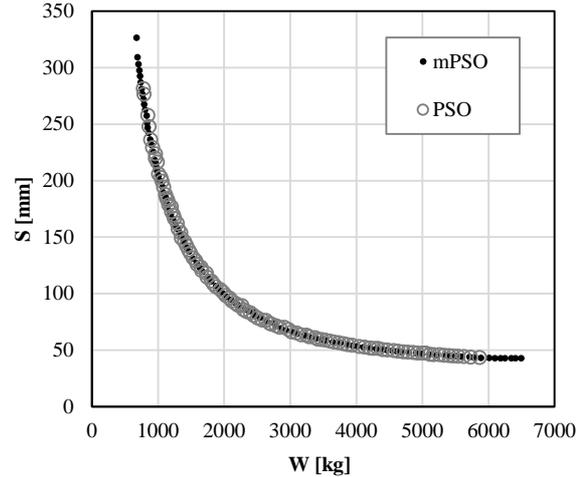


Fig.5 Pareto optimal solution

Table1 Statistics of m_a , d_{Avg} , d_{SD}

	m_a	d_{Avg}	d_{SD}
mPSO	Min	100	1.43E-02
	Max	100	1.53E-02
	Avg	100	1.48E-02
	SD	0	2.50E-04
PSO	Min	100	1.11E-02
	Max	100	1.41E-02
	Avg	100	1.26E-02
	SD	0	6.79E-04

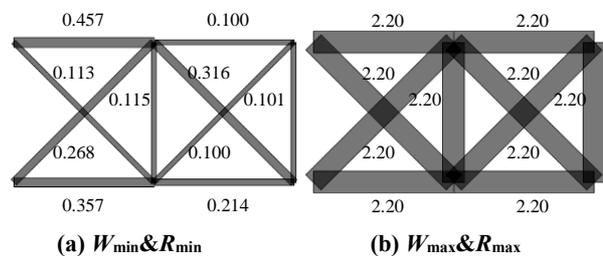


Fig.6 Optimal truss [$\times 10^4 \text{ mm}^2$]

Table2 Characteristic values

	W [kg]	C [N·mm]	R [mm^{-1}]
(a) $W_{min} \& R_{min}$	6.26E+02	7.65E+07	2.91E-03
(b) $W_{max} \& R_{max}$	6.49E+03	9.61E+06	2.32E-02

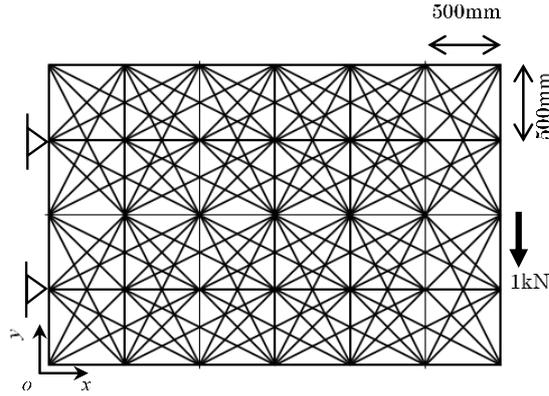


Fig.7 Ground structure

S を示している. Fig.9 は 100 個のパレート最適解から 6 つを選んでトラスの位相を示したもので, Table3 はこれらのトラスに対する特性値を示している. 体積が最小 (感度 S が最大) となる No.1 のトラスからロバスト性が徐々に高くなるのに従い, トラスの位相は Fig.9(a)~(f) のように部材が増えて複雑に変化している. なお, Fig.8 及び Table 3 に示した No.100 のパレート最適解は, ロバスト性が最も高いトラスで, 中央の水平材を除いて全ての部材断面が最大 ($1.0 \times 10^2 \text{ mm}^2$) になっている.

Fig.10 は体積比 (最大体積との比) に対するロバスト比 (最大のロバスト指標との比) を示したものである. 体積比の小さい領域では, 傾きが大きいことから体積の増加に伴ってロバスト指標も大きく変化している. 一方, 体積比が大きい領域では, 傾きが緩やかになっていることから体積の増加に伴うロバスト指標の変化は小さくなっている. したがって, 勾配の小さい領域からパレート最適解を選べば, ロバスト性をなるべく損なわずに体積 (コスト) の小さいトラスを選択することができる. 多目的最適化問題においては, 意思決定者 (設計者) が複数のパレート最適解から一つの解を選択することになるが, このような勾配情報を示すことも有効であると考えられる.

6.3. モンテカルロ法によるロバスト指標の検証

Fig.8 及び Table3 に示した 7 つのトラスに対してモンテカルロ法を適用し, ロバスト指標 R の信頼性について検証する. 荷重は, 平均値-1000N, 標準偏差 100N の正規分布に基づく乱数を発生させることによって与え, 10000 回の数値実験を行った. この数値実験による平均コンプライアンスの度数分布を Fig.11 に示す. ロバスト指標が大きくなるに従い急峻で高い山になり, ばらつきの小さい高品質なトラスが得られていることがわかる. さらに, Table 5 はロバスト指標を検証したもので, 式(1)で定めた荷重と平均コンプライアンスの分散の比からロバスト指標 R を求めたものである. 感度 S から求められたロバスト指標とモンテカルロ法によって得られたロバスト指標の差はいずれも 1% 以下となっており, よく一致していることがわかる.

なお, No.1 のトラスでは応力度が許容応力度を上回って

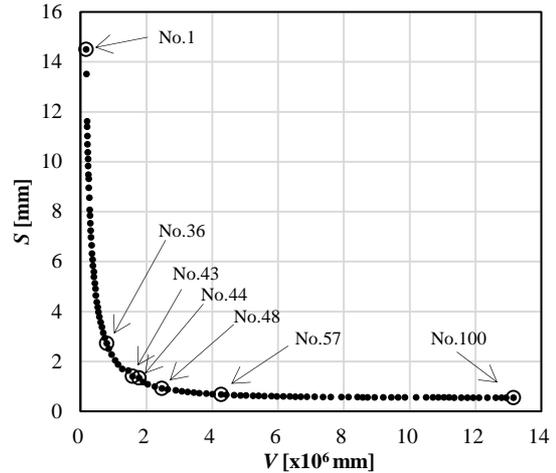


Fig.8 Pareto-optimal solution

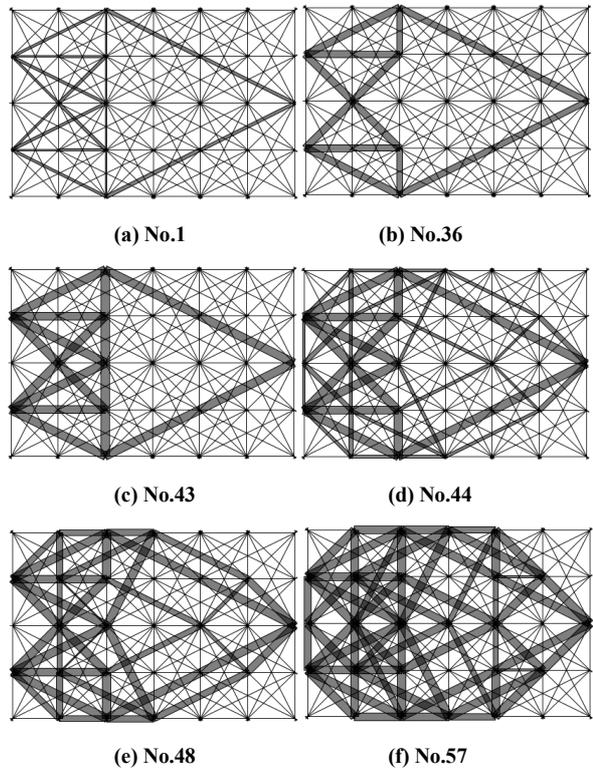


Fig.9 Optimal truss structures

Table3 Characteristic values

	$V [\text{mm}^3]$	$C [\text{N} \cdot \text{mm}]$	$R [\text{mm}^{-1}]$
No.1	1.62E+05	7.25E+03	6.90E-02
No.36	7.87E+05	1.37E+03	3.66E-01
No.43	1.58E+06	7.04E+02	7.10E-01
No.44	1.77E+06	6.71E+02	7.45E-01
No.48	2.47E+06	4.63E+02	1.08E+00
No.57	4.27E+06	3.38E+02	1.48E+00
No.100	1.31E+07	2.78E+02	1.80E+00

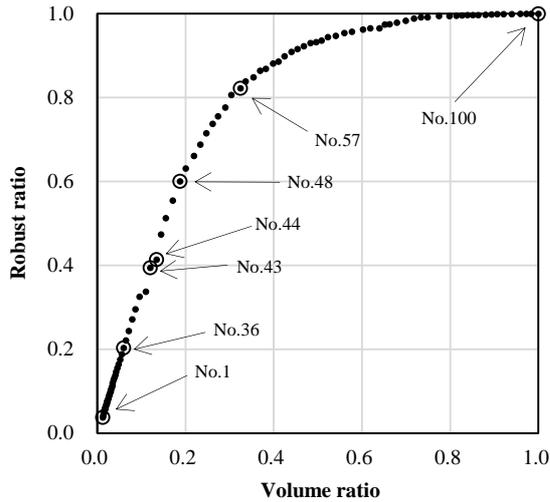


Fig.10 Robust ratio vs. Volume ratio

しまう場合が、4.78%の確率で認められた。これは平均コンプライアンスのばらつきが大きくなり応力度のばらつきも大きくなってしまったためである。このような不良率を制御する方法については今後の研究課題としたい。

7. おわりに

本論はロバスト性を考慮したトラス構造物の多目的最適化問題に mPSO を適用し、本手法の有効性と荷重に対する平均コンプライアンスのロバスト性について考察した。

ロバスト性を考慮した断面最適化問題では、著者が提案した mPSO を適用することによって、通常の PSO よりパレート最適解の集合を広く均一に探索できることを示した。さらに、ロバスト性を考慮した位相最適化問題では、ロバスト性が高くなるに従い、部材数が増えて位相も複雑に変化することを示した。さらに、モンテカルロ法による数値実験を行うことによって、本論で定めたロバスト指標の有効性を確認することができた。

[参考文献]

- 1) 山川宏, 宮下真, “ロバスト構造に関する研究”, 日本機械学会論文集 (C編) 57 巻 544 号, 1991.
- 2) Ben-Tal A. and Nemirovski A., “Robust truss topology design via semidefinite programming”, SIAM Journal Optimization Vol.7, No.4, 1997.
- 3) 大森博司, 早稲倉章吾, 河村拓昌, 石山達士, “ファジィ理論に基づく不確定性を考慮した空間構造物の形態創生に関する研究”, 日本建築学会構造系論文集, 第 578 号, 2004.
- 4) 寒野善博, 竹脇出, “剛性および外力の不確定性を考慮したトラスのロバストネス関数に対する近似アルゴリズム”, 日本建築学会構造系論文集, 第 591 号, 2005.
- 5) 高田 豊文, “複数荷重条件を有するトラス・トポロジーの多目的最適化”, 理論応用力学講演会講演論文集 57, 2008.
- 6) 瀧圭佑, 曾我部博之, 三井和男, “改良型ホップフィールドネ

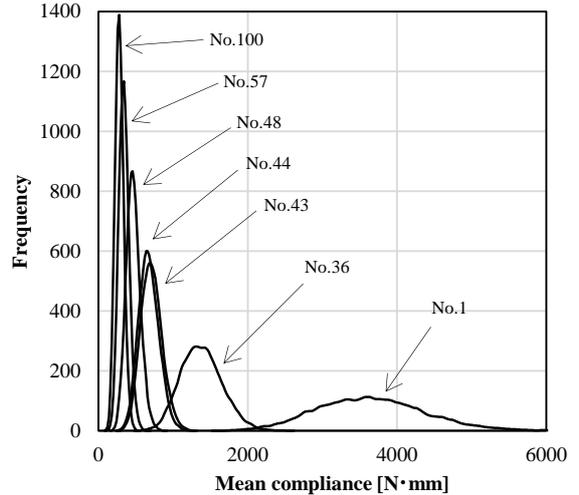


Fig.11 Histogram of mean compliance

Table4 Robust index using the Monte Carlo method

	$Var[F]$	$Var[C]$	$R [mm^{-1}]$	Error
No.1	9.86E+03	2.08E+06	6.89E-02	0.082%
No.36	1.01E+04	7.60E+04	3.65E-01	0.247%
No.43	9.90E+03	1.97E+04	7.09E-01	0.192%
No.44	1.00E+04	1.81E+04	7.44E-01	0.140%
No.48	1.03E+04	8.90E+03	1.08E+00	0.389%
No.57	1.00E+04	4.60E+03	1.48E+00	0.290%
No.100	1.02E+04	3.17E+03	1.79E+00	0.400%

ットワークを用いた連続体の形状最適化”, 構造工学論文集 Vol.55B, 2009.

- 7) 今関俊, 大崎 純, 山川 誠, “順序統計量を用いた多目的ロバスト最適化”, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 2018.
- 8) Dunning P.D., Kim H.A. and Mullineux G., “Introducing Loading Uncertainty in Topology Optimization”, AIAA Journal, Vol.49, No.4, 2011.
- 9) 曾我部博之, “遺伝的アルゴリズムによる平面骨組のロバスト性を考慮した塑性設計”, 構造工学論文集, Vol.44B, 1998.
- 10) 曾我部博之, “非線形感度によるロバスト性を考慮した平面骨組の最適塑性設計—PC クラスタを用いた並列 GA の多目的最適設計への応用—”, 日本建築学会構造系論文集, 第 556 号, 2002.
- 11) J. Kennedy and R.C. Eberhart, “Particle Swarm Optimization”, IEEE International Conf. on Neural Networks, 1995.
- 12) 菅谷明誉, 曾我部博之, “修正 PSO による建築骨組構造物の高次元最適化”, 日本計算工学会論文集, 2016.
- 13) Ang, A.H-S., “Probability Concepts in Engineering Planning and Design”, McGraw-Hill, 1975 (伊藤, 亀田訳, “土木・建築のための確率・統計の基礎”, 丸善, 1977)
- 14) Coello C.A.A., Pulido G.T., and Lechuga M.S., “Handling Multiple Objectives with Particle Swarm Optimization”, IEEE Transactions on Evolutionary Computation Vol.8, No.3, 2004.
- 15) Rajeev,S. and Krishnamoorthy,C.S. : Discrete Optimization of Structures using Genetic Algorithms, J. of Structural Eng., ASCE, Vol.118, 1992.