

組合せ剛性理論に基づく立方体グリッドを剛にする斜材の新たな追加手法

New Addition Methods of Diagonal Braces to Make Cubic Grids Rigid Based on Combinatorial Rigidity Theory

○吉山 大雅*¹, 小林 祐貴*²
Taiga YOSHIYAMA*¹ and Yuki KOBAYASHI*²

*1 大阪公立大学大学院 工学研究科 都市系専攻 前期博士課程

Graduate Student, Department of Architecture and Building Engineering, Osaka Metropolitan University.

*2 大阪公立大学大学院 工学研究科 都市系専攻 講師 博士(工学)

Lecturer, Department of Architecture and Building Engineering, Osaka Metropolitan University, Ph.D.

キーワード：組合せ剛性理論; Bar-Joint フレームワーク; 斜材; デザイン科学

Keywords: combinatorial rigidity theory; bar-joint framework; diagonal braces; design science.

1. はじめに

本研究では、組合せ剛性理論をもとに立方体グリッドに斜材を追加した構造物を生成する手法を提案し建築に応用することを目的とする。組合せ剛性理論とは、構造物の接続関係をグラフとして扱うことで、その剛性についての特徴付けを組合せ的に行う理論である。

伸び縮みしない剛な棒材(bar)とピン接合(joint)で構成される構造物を bar-joint フレームワークと呼ぶ。フレームワークの接続関係をグラフ G で表す。グラフ G は、 $G = (V, E)$ と表し、 $V(G)$ が頂点集合、 $E(G)$ が辺集合を表す。

3次元 bar-joint フレームワークは、グラフ $G = (V, E)$ と写像 $p: V(G) \rightarrow R^3$ の組 (G, p) で表される。写像 p によって各頂点の R^3 内での座標を指定している¹⁾。

フレームワーク (G, p) の連続的動きとは、辺の長さ変わらず頂点が連続的に移動することで、フレームワークの動きと呼ぶ。とくに、合同なフレームワークへの移動を自明な動きと呼ぶ。自明な動きのみが可能なフレームワークを剛であるといい、剛でないフレームワークを柔軟であるという²⁾。また、どの棒材を1つ取り除いた場合にも、剛ではなくなるグラフのことを極小剛であるという。2次元において、三角形フレームワークは自明な動きのみが可能であるから剛である(図1a)。平行四辺形フレームワークは元のフレームワークとは合同ではない形へ変形出来るので柔軟である(図1b)。

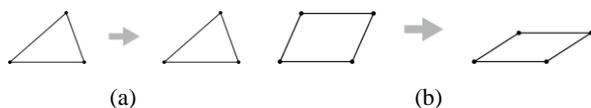


図1 (a) 自明な動きのみ (b) 変形

bar-joint フレームワークの組合せ的性質は、Maxwell³⁾の

条件や Laman⁴⁾の定理として知られている。しかし、 d 次元の一般化は、必要条件を与えてくれるが十分条件ではなく、 $d = 2$ のような組合せの特徴付けは未だ得られていない⁵⁾。

Recski⁶⁾は、立方体で構成された3次元 bar-joint フレームワークに対して、筋交いを追加することで剛であるときの必要条件を示している。Whiteley⁷⁾は、剛な3次元 bar-joint フレームワークを生成するいくつかの操作を示している。

組合せ剛性理論の成果は、たんばく質挙動解析、ロボティクス、センサーネットワーク、機械工学、建築の構造分野等、様々な分野において応用されている²⁾。

建築構造物の形態生成における研究は、小林ら⁸⁾による panel-hinge フレームワークの剛な構造物の生成手法と建築形態デザインに関する研究、小林ら⁹⁾による空間充填多面体を用いた3次元の極小剛な bar-joint フレームワークの生成手法と建築形態デザインに関する研究といった研究がある。

本研究では、接続関係によって剛性を判断できる組合せ剛性理論をデザインに活かすことで構造的に成り立つものでありながら今までになかったデザインを生み出せることに着目している。組合せ剛性理論に基づいた Whiteley⁷⁾が示した2つの操作と小林ら⁹⁾が示した操作を用いて、立方体グリッドに斜材を追加した構造物を生成する新たな手法を提案する。

2. 準備

以下に Maxwell³⁾の条件を示す。

定理 1 (Maxwell³⁾) 伸び縮みのない $|E|$ 本の棒材と $|V|$ 個のジョイントで構成された3次元 bar-joint フレームワークが剛であるためには $|E| \geq 3|V| - 6$ が必要条件である。

Whiteley⁷⁾により、以下の操作が定義されている。

操作 1 (Vertex 3-addition) グラフ $G = (V, E)$ が与えられているとし、 $v_1, v_2, v_3 \in V$ とする。新たに頂点 v_0 及び辺 $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3)$ を追加する操作を操作 1(Vertex 3-addition) とする (図 2a)。

操作 2 (Edge 3-split) グラフ $G = (V, E)$ が与えられているとし、 $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V, (v_1, v_2) \in E$ とする。新たに頂点 v_0 及び辺 $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4)$ を追加する操作を操作 2 (Edge 3-split) とする (図 2b)。

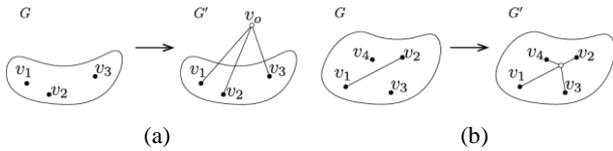


図 2 (a) Vertex 3-addition (b) Edge 3-split

さらに Whiteley により操作 1、操作 2 について、以下の補題が示されている⁷⁾。ここで頂点 v_i の点配置を p_i とする。

補題 1 (Whiteley⁷⁾) グラフ $G = (V, E)$ が与えられているとし、 $v_1, v_2, v_3 \in V$ とする。剛なフレームワーク (G, p) に新たな頂点 v_0 及び $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3)$ を追加したフレームワークを (G', p') とする。このとき、 p_0, p_1, p_2, p_3 が同一平面上にないならば、 (G', p') もまた剛である。

補題 2 (Whiteley⁷⁾) グラフ $G = (V, E)$ が与えられているとし、 $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V, (v_1, v_2) \in E$ とする。剛なフレームワーク (G, p) に新たに頂点 v_0 及び辺 $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4)$ を追加したフレームワークを (G', p') とする。このとき、 p_0, p_1, p_2, p_3 が同一平面上にないならば、ほとんど全ての (G', p') が剛である。

補題 2 により、操作 2 を行う場合は剛にならないこともあることに注意しなければならない。

剛性行列について説明する。 d 次元において、同じグラフ $G = (V, E)$ を有する二つのフレームワーク (G, p) と (G, q) に対して、グラフの辺 $e = (u, v) \in E$ とする。対応する辺の長さが等しいとき、次の式が成り立つ。

$$|p(u) - p(v)|^2 = |q(u) - q(v)|^2 \quad \text{for all } (u, v) \in E(G) \quad (1)$$

式(1)を p について微分すると、次の線形方程式を得る。

$$(p(u) - p(v)) \cdot (p'(u) - p'(v)) = 0 \quad \text{for all } (u, v) \in E(G) \quad (2)$$

式(2)の解 \dot{p} を (G, p) の無限小動きという。可能な無限小動きがすべて自明である場合、無限小剛であるという。線形方程式(2)を変数 \dot{p} に対し行列表現して得られる $|E(G)| \times d|V(G)|$ 連立方程式の左辺の行列は剛性行列と呼ばれ、 $R(G, p)$ と記す。自明な無限小動きを表す線形空間の次元が $\binom{d+1}{2}$ であるので、 $\dim \ker R(G, p) \geq \binom{d+1}{2}$ がある。したがって、

(G, p) が無限小剛であるための必要十分条件は次式で与えられる²⁾。

$$\text{rank } R(G, p) = d|V| - \binom{d+1}{2}$$

無限小剛性は剛性行列の階数を計算することで判定可能であり、無限小剛性は剛性の十分条件であることが知られている¹⁰⁾。そのため、本研究でフレームワークの剛性を解析したい場合は、剛性行列のランク計算をして確認する。

3. 斜材が挿入された立方体グリッドの生成

3.1. $2 \times 1 \times 2$ の立方体グリッド

x 軸方向に 2、 y 軸方向に 1、 z 軸方向に 2 の合計 $2 \times 1 \times 2$ 個の立方体で構成された 3 次元 bar-joint フレームワーク F について考える (図 3a)。立方体の各面は xy, zx, yz 平面のうち、いずれかの平面について平行であるとする。 F の頂点のなかで x 座、 y 座標、 z 座標の各々が最小の頂点を p_F とする。 $p_F = (s, t, u)$ のとき、 F を (s, t, u) -立方体グリッドと呼ぶ。

3.2. 斜材の追加された立方体グリッドの生成

本研究では、Grasshopper を用いて、 $2 \times 1 \times 2$ の立方体グリッド (図 3a) に斜材を挿入する。斜材の向きは固定している (図 4)。どの面に斜材を追加するかは組合せが膨大で検証できないため、定理 1 より、 $|E| = 3|V| - 6$ を満たす極小剛であるものだけを抽出した。結果、15,504 通りに絞り込むことができ、その中で剛性行列を用いて剛であった立方体グリッドは 5,656 個であった。そのうちの 1 つを図 3b に示す。

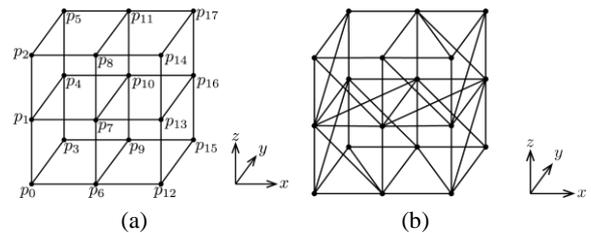


図 3 (a) $2 \times 1 \times 2$ の立方体グリッド (b) 極小剛な立方体グリッド

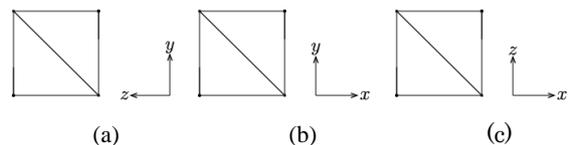


図 4 (a) xy 平面 (b) yz 平面 (c) zx 平面

3.3. 組合せ的に剛であるかの検証

第 3.2 節で生成した立方体グリッド (図 3b) を考える。操作 1 と操作 2 を繰り返していくことで同じ面に斜材を挿入することができた (図 5)。また、剛性行列により剛

であることを確認した。

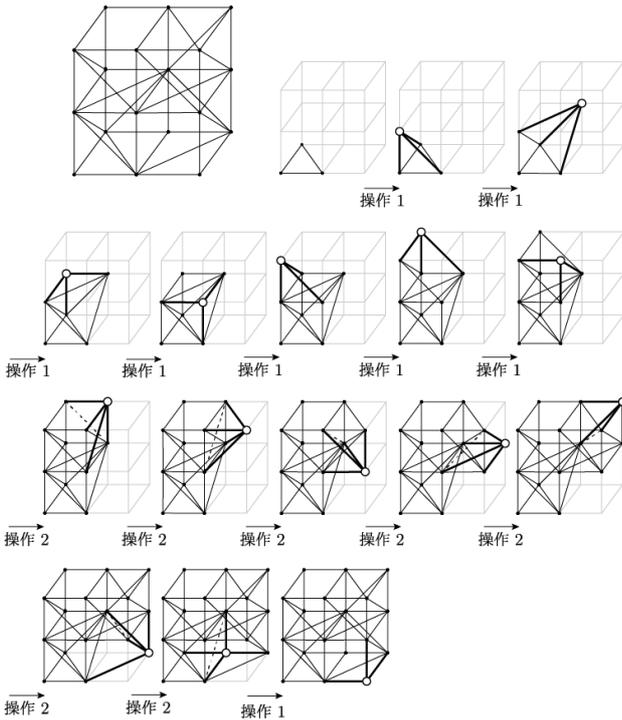


図5 極小剛な $2 \times 1 \times 2$ の立方体グリッドと生成過程

4. $2 \times 1 \times 2$ 立方体グリッドの剛な領域の拡大

4.1. x, y, z 軸方向への拡大

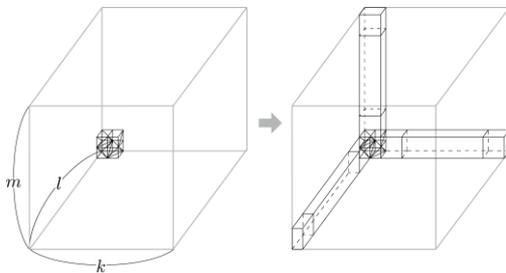


図6 x, y, z 軸方向への拡大

$2 \times 1 \times 2$ の立方体グリッド(図5)を起点に、 x, y, z 軸方向に $2 \times 1 \times 2$ 立方体グリッドを追加することを考える(図6)。つまり、極小剛な立体の剛な1面に接続することを考えればよい。第3.3節で生成した立方体グリッドの接続関係をグラフ $G = (V, E)$ として与えると、 $|V| = 18, |E| = 48$ である。

z 方向に追加した場合、生成された立方体グリッドをグラフ $G' = (V', E')$ として与えると、 $|V'| = 30, |E'| = 48 \times 2 - 7 = 89$ である。定理2より、極小剛であるには $|E'| = 3 \times 30 - 6 = 84$ であればよいので、斜材が5本多いことがわかる。

そこで、Grasshopperを用いて、 $2 \times 1 \times 2$ の立方体グリッド(図5)から斜材を5本少なく、接続したとき極小剛になるものを探した。その結果、21個を見つけることがで

きた。その中で、操作1と操作2を用いて生成できる立方体グリッドを見つけた(図7)。

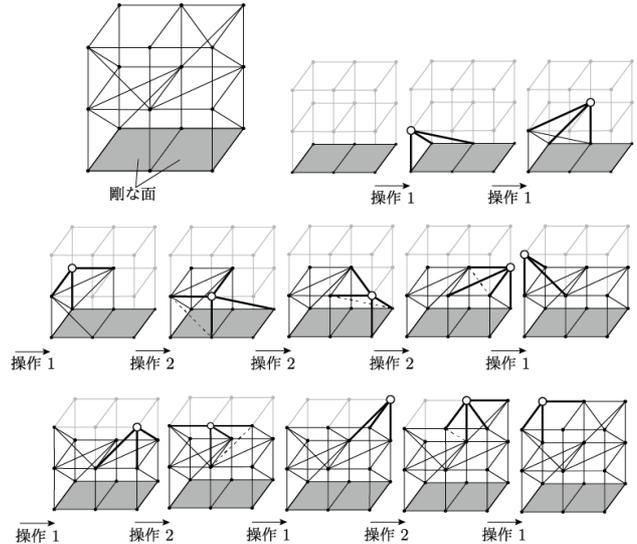


図7 x, y, z 軸方向へ拡大する立方体グリッドと生成過程

4.2. xy, yz, zx 平面の拡大

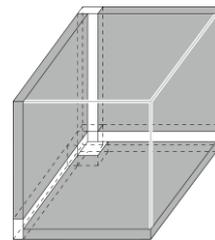


図8 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面の拡大

x, y, z 軸方向へ拡大した後に、 $2 \times 1 \times 2$ 立方体グリッドを xy 平面、 yz 平面、 zx 平面に追加することを考える(図8)。剛な面が2面ある場合に追加すると極小剛になる $2 \times 1 \times 2$ 立方体グリッドを第4.1節と同様に見つけた(図9)。

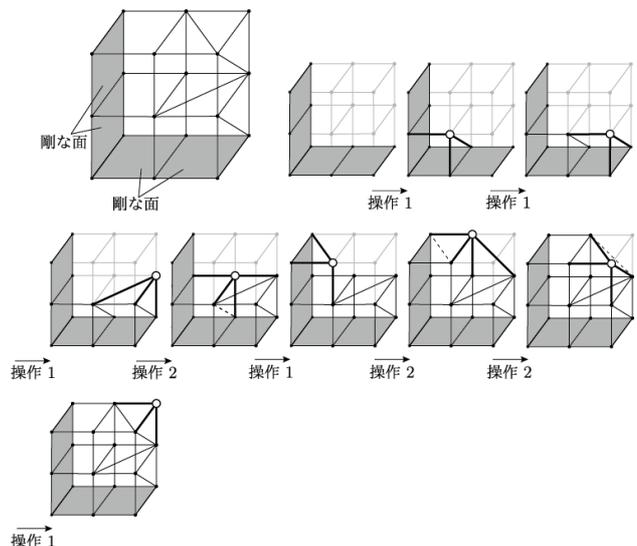


図9 xy, yz, zx 平面へ拡大する立方体グリッドと生成過程

4.3. 構造物の生成

提案した $2 \times 1 \times 2$ の立方体グリッドを生成する手法(図7,9)と小林ら⁹⁾が提案した手法を用いて、開口部を設定した構造物を生成した(図10ab)。生成過程は図10cに示す。

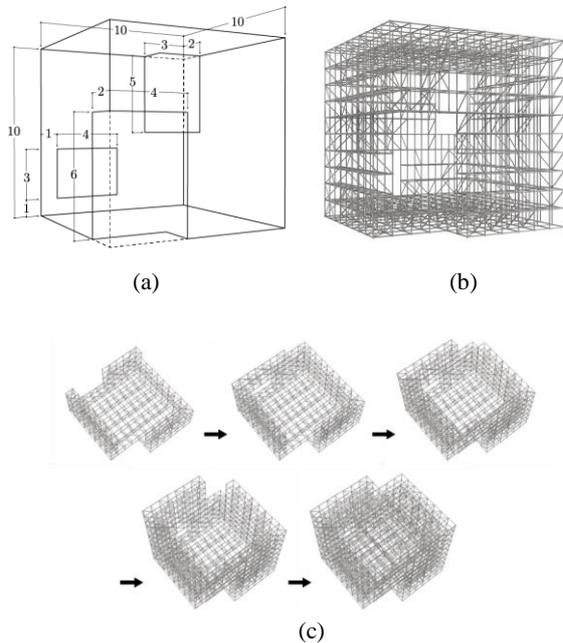


図10 (a) 開口部の設定 (b) 生成した構造物 (c) 生成過程

5. 立方体の生成

5.1. $2 \times 2 \times 2$ 立方体の生成

(s, t, u) -立方体グリッド(図5)に、新たに $(s+1, t, u)$ -立方体グリッドを追加することで、極小剛な $2 \times 2 \times 2$ 立方体グリッドを生成した(図11)。追加する $2 \times 1 \times 2$ 立方体グリッドを第4.1節と同様に見つけた(図12)。

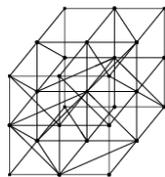


図11 極小剛な $2 \times 2 \times 2$ 立方体グリッド

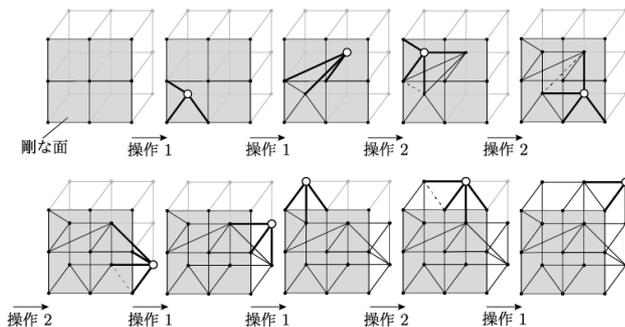


図12 追加する $(s+1, t, u)$ -立方体グリッド

5.2. $3 \times 3 \times 3$ 立方体の生成

第5.1章で作成された $2 \times 2 \times 2$ 立方体と $2 \times 1 \times 2$ 立方体を用いて、 $3 \times 3 \times 3$ 立方体を生成した(図13)。

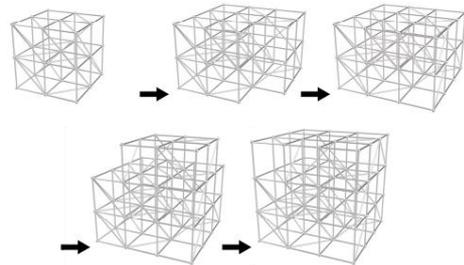


図13 生成した $3 \times 3 \times 3$ 立方体構造物

6. まとめ

本研究では、組合せ剛性理論をもとに立方体グリッドに斜材を追加した構造物を生成する手法を提案した。開口部がある構造物や $3 \times 3 \times 3$ 立方体の構造物を生成した。本提案手法で生成した立方体グリッドの構造物に床面を配置することで、建築空間として期待できる。また、本提案手法により斜材をまばらに配置できるため、簡単な操作でありながら、直感的に剛と判断できない構造物を生成できた。今後は本提案手法を一般化することで $n \times n \times n$ 立方体の生成を検討する。

【参考文献】

- 1) 谷川眞一：グラフ剛性の組合せ的特徴づけ. 応用数理, 28(4):15-22, 2018.
- 2) 加藤直樹：組合せ剛性理論とその応用. システム/制御/情報, 59(7):262-267, 2015.
- 3) J. C. Maxwell: On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 27(182):294-299, 1864.
- 4) G. Laman: On graphs and rigidity of plane skeletal structures. Journal of Engineering mathematics, 4(4):331-340, 1970.
- 5) J. E. Graver, B. Servatius, and H. Servatius. Combinatorial rigidity. No. 2 American Mathematical Soc., 1993.
- 6) A. Recski: Bracing cubic grids—a necessary condition. Discrete Mathematics, 73(1-2):199-206, 1988.
- 7) W. Whiteley: Some matroids from discrete applied geometry. Contemporary Mathematics, 197:171-312, 1996.
- 8) Y. Kobayashi, N. Katoh, T. Okano, and A. Takizawa: An inductive construction of rigid panel-hinge graphs and their applications to form design. International Journal of Architectural Computing, 13(1):45-63, 2015.
- 9) 小林祐貴, 加藤直樹: 極小剛な空間充填立体 bar-joint フレームワークの生成手法及び建築形態デザインへの応用. 日本建築学会環境系論文集, 83(745):323-331, 2018.
- 10) L. Asimow and B. Roth: The rigidity of graphs. Transactions of the American Mathematical Society, 245:279-289, 1978.