

# 数理計画法と発見的手法の併用による剛体切り紙の展開機構の自動生成 Automatic Generation of Deployment Mechanisms for Rigid Kirigami using Mathematical Programming and Meta-heuristics

○遊佐 太貴\*<sup>1</sup>, 藤田 慎之輔\*<sup>2</sup>  
Taiki YUSA\*<sup>1</sup>, Shinnosuke FUJITA\*<sup>2</sup>

\*1 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 大学院生

Graduate Student, Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu

\*2 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 准教授

Assoc. Prof., Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu, Dr. Eng.

**キーワード**：展開構造 逐次二次計画法 発見的手法

**Keywords**：DEPLOYMENT STRUCTURE, SEQUENTIAL QUADRATIC PROGRAMMING, META-HEURISTICS.

## 1. はじめに

日本の伝統的な造形文化である折り紙は、現在では“Origami”という科学技術の一分野として世界的に認知されており、人工衛星の太陽光電池パネルに利用されたミウラ折り<sup>1)</sup>をはじめとして、構造物への応用事例が数多く存在する。米国では2012年に Origami Design for Integration of Self-assembling Systems for Engineering Innovation(ODISSEI) Awards が国家プロジェクトとしてスタートし、折紙と最新のテクノロジーの融合が起きている<sup>2)</sup>。最近では、Origami とともに“Kirigami”も学術用語として一般化し、2019年にはハーバード大学工学・応用科学大学院(SEAS)にある Mahadevan 研究室らのグループがシート状の素材を意図した形状へと変形させる数学的フレームワークを考案した話題となった<sup>3)</sup>。

本研究では、大変形問題の機構原理として近年注目を集めている Kirigami の特に展開構造としての建築物への応用を見据えて、Kirigami の展開機構の幾何学的条件を定式化し、最適化手法と組み合わせることで大変形可能な展開機構の自動生成を試みる。

## 2. 本研究で扱う Kirigami とその数理モデリング

Kirigami の研究では、カットされた部材が弾性変形を伴うもの<sup>4,5)</sup>と、剛体変形のみで記述されるいわゆる剛体切り紙<sup>3,6)</sup>とに大別されるが、本研究では後者のうち、格子状の切込みと回転ヒンジを有し、ポアソン比が負となるような平面展開構造を取り扱う。解析モデルは  $i$  方向に  $I+1$  個、 $j$  方向に  $J+1$  個の合計  $(I+1) \times (J+1)$  個の四辺形要素で構成され、隣接要素の接辺はいずれか1つの頂点でのみ回転ヒンジにより接続されているものとする(図1)。  $i$  行、 $j$  列目の要素の各頂点の節点座標を

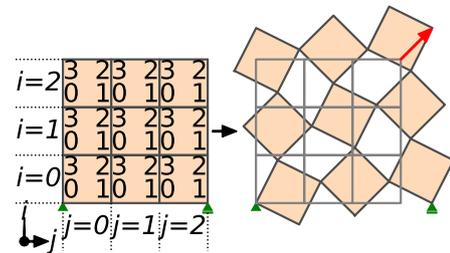


図1 本研究で扱う Kirigami とその展開機構  
( $I=1, J=2$  の場合)

左下から順に反時計回りに

$$\mathbf{r}_{ij}^k = \begin{bmatrix} x_{ij}^k & y_{ij}^k \end{bmatrix}^T \quad (k=0, 1, 2, 3) \quad (1)$$

と定義する。同様に、 $i$  行、 $j$  列目の要素の各頂点の節点変位を左下から順に反時計回りに

$$\mathbf{u}_{ij}^k = \begin{bmatrix} u_{ij}^k & v_{ij}^k \end{bmatrix}^T \quad (k=0, 1, 2, 3) \quad (2)$$

と定義する。例えばこのとき、左下の要素の左下の節点座標ベクトルは  $\mathbf{r}_{00}^0$ 、右下の要素の右下の節点座標ベクトルは  $\mathbf{r}_{10}^1$  と表される。同様に右上の要素の右上の節点の変位ベクトルは  $\mathbf{u}_{1,2}^2$  と表される。モデル下部がピン支持並びにローラー支持されているとき、この展開機構が満たすべき幾何学的制約条件を考える。

### 2.1. 剛体変位条件

四辺形要素は変形前後でその形状が変化しない条件は、要素の対角線の長さとおのづから4辺のうち3辺の長さが変化しない条件と等価であることから、次のように表現で

きる。

$$\left| \mathbf{r}_{ij}^k - \mathbf{r}_{ij}^{k+1} \right| - \left| (\mathbf{r}_{ij}^k + \mathbf{u}_{ij}^k) - (\mathbf{r}_{ij}^{k+1} + \mathbf{u}_{ij}^{k+1}) \right| = 0 \quad \begin{matrix} i=0, \dots, I \\ j=0, \dots, J \\ k=0, 1, 2 \end{matrix} \quad (3a)$$

$$\left| \mathbf{r}_{ij}^k - \mathbf{r}_{ij}^{k+2} \right| - \left| (\mathbf{r}_{ij}^k + \mathbf{u}_{ij}^k) - (\mathbf{r}_{ij}^{k+2} + \mathbf{u}_{ij}^{k+2}) \right| = 0 \quad \begin{matrix} i=0, \dots, I \\ j=0, \dots, J \\ k=0, 1 \end{matrix} \quad (3b)$$

## 2.2. ヒンジ部における変位の適合条件

隣接要素の接辺はいずれか1つの頂点でのみ回転ヒンジにより接続されているため、ヒンジ部分の節点座標は常に隣接要素で等しくなければならない。ヒンジは隣接要素の接辺に対して1箇所ずつとしているので、ヒンジの数は合計で  $I \times (J+1) + (I+1) \times J = I+J+2IJ$  個となる(図1の場合は12個)。隣接要素の接辺のヒンジの存在位置を表す0-1変数ベクトルを

$$\mathbf{t} = [t_{00,10}, \dots, t_{I-10,10}, \dots, t_{0J,1J}, \dots, t_{I-1J,1J}, t_{00,01}, \dots, t_{0J-1,0J}, \dots, t_{I0,I1}, \dots, t_{IJ-1,IJ}]^T \quad (4)$$

とおくと、ヒンジ部における変位の適合条件は次式で記述できる。

$$(\mathbf{u}_{ij}^3 - \mathbf{u}_{i+1j}^0) t_{ij,i+1j} + (\mathbf{u}_{ij}^2 - \mathbf{u}_{i+1j}^1)(1 - t_{ij,i+1j}) = 0 \quad \begin{matrix} i=0, \dots, I-1 \\ j=0, \dots, J \end{matrix} \quad (5a)$$

$$(\mathbf{u}_{ij}^1 - \mathbf{u}_{ij+1}^0) t_{ij,ij+1} + (\mathbf{u}_{ij}^2 - \mathbf{u}_{i+1j}^3)(1 - t_{ij,ij+1}) = 0 \quad \begin{matrix} i=0, \dots, I \\ j=0, \dots, J-1 \end{matrix} \quad (5b)$$

式(5a)は上下に隣接する要素の接辺に存在するヒンジに関する変位の適合条件であり、 $t_{ij,i+1j} = 0$ のとき頂点2と頂点1を接続するヒンジが、 $t_{ij,i+1j} = 1$ のとき頂点3と頂点0を接続するヒンジが存在する。式(5b)は左右に隣接する要素の接辺に存在するヒンジに関する変位の適合条件であり、 $t_{ij,ij+1} = 0$ のとき頂点2と頂点3を接続するヒンジが、 $t_{ij,ij+1} = 1$ のとき頂点1と頂点0を接続するヒンジが存在する。

## 2.3. 境界条件

$i$ 行、 $j$ 列目の要素の各頂点の変形前の節点座標を

$$\bar{\mathbf{r}}_{ij}^k = [\bar{x}_{ij}^k \quad \bar{y}_{ij}^k]^T \quad (k=0, 1, 2, 3) \quad (6)$$

とする。左下の要素の左下の点がピン支持、右下の要素の右下の点がローラー支持である場合の境界条件式は次のように記述できる。

$$\mathbf{u}_{00}^0 = \mathbf{0} \quad (7a)$$

$$v_{J0}^1 = 0 \quad (7b)$$

## 2.4. 最大展開形状を求める最適化問題

ヒンジ位置  $\mathbf{t}$  を既知量として、モデルの展開形状を解析的に求めることを考える。右上の要素の右上の点が最も変形したときを最大展開形状と定義すると、その状態の節点変位ベクトルは、式(3)、(5)、(7)を制約条件に持つ最大化問題

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{U}}{\text{maximize}} && f = \|\mathbf{r}_{IJ}^2 + \mathbf{u}_{IJ}^2\| \\ & \text{subject to} && \text{Eq. (3a), (3b), (5a), (5b), (7a), and (7b)} \end{aligned} \quad (8)$$

を解くことで得られる。ここで、 $\mathbf{U}$  は  $\mathbf{u}_{ij}^k$  の全成分を並べた列ベクトルである。

$$\mathbf{U} = [u_{00}^0, \dots, u_{00}^3, u_{10}^0, \dots, u_{10}^3, u_{00}^0, \dots, u_{IJ}^3]^T \quad (9)$$

最適化問題(8)は節点変位を設計変数とした連続変数問題であり、目的関数、制約条件関数ともに  $\mathbf{U}$  の関数となるため、数値計画法により高速に解くことができる。

## 3. ヒンジ位置を既知量とした変形量最大化

図2、図4、図6に示すような1辺1mの正方形のみで構成される  $I=J=2, 3, 4$  の単純な Kirigami に対して、ヒンジ位置を表す0-1変数ベクトル  $\mathbf{t}$  を既知量として最適化問題(8)を逐次二次計画法<sup>7)</sup>により解く。図3、図5、図7にはそれぞれの解析モデルに対する問題(8)の最適化結果を示す。表1にはそれぞれのモデルの  $\mathbf{r}_{00}^k$  から  $\mathbf{r}_{IJ}^k$  の距離と目的関数  $f$  とヒンジの数を示す。表1の

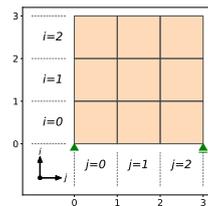


図2 解析モデル1  
( $I=J=2$ )

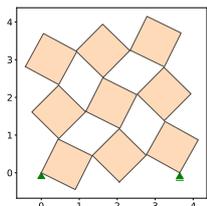


図3 解析モデル1に対する問題(8)の最適化結果

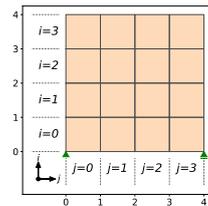


図4 解析モデル2  
( $I=J=3$ )

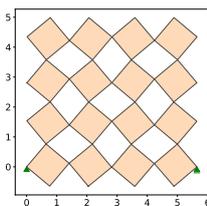


図5 解析モデル2に対する問題(8)の最適化結果

最適化結果から、正方形 Kirigami の場合 Kirigami の枚

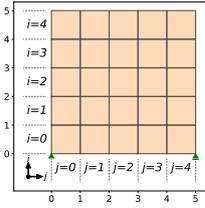


図6 解析モデル3  
( $I = J = 4$ )

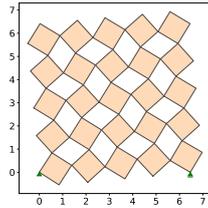


図7 解析モデル3に対する問題(8)の最適化結果

表1 解析結果

解析モデル1 解析モデル2 解析モデル3

	解析モデル1	解析モデル2	解析モデル3
$ r_{I,J}^k $ [m]	4.24	5.66	7.07
$f$ [m]	5.09	7.13	9.10
$t$ [個]	12	24	40

数が増えるほど初期形状からの変位が大きくなっていることが分かる。また、格子状のKirigamiのヒンジパターンを何種類か検討したところ図3, 図5, 図7のそれぞれの場合とこれらのヒンジ位置と逆の場合の2つしか存在しないことが確認できた。それ以外のヒンジ位置に設定するとKirigamiに重なりが生じる場合などが確認できた。ヒンジ位置の設定はヒンジの数が増えるほど複雑になるので予め設定することは難しい。

#### 4. Kirigamiの重なりを排除する制約

1つの要素に着目したとき、その要素の内部に節点が存在しなければ、Kirigamiの重なりは起きない。ある要素と節点に対して、要素の頂点と節点がつくる4つの三角形の面積の合計が、要素の面積に等しければ節点は要素の内部もしくは境界上に存在し、要素の面積よりも大きければ節点は要素の外部にある。 $I = i, J = j$ の要素の各頂点 $r_{ij}^k$ ( $k = 0, \dots, 3$ )と $I = \alpha, J = \beta$ の要素の $l$ 番目の節点 $r_{\alpha\beta}^l$ がつくる4つの三角形の面積の合計 $A_{ij\alpha\beta l}$ は次式で計算できる。

$$A_{ij\alpha\beta l} = a_{ij\alpha\beta l}^0 + a_{ij\alpha\beta l}^1 + a_{ij\alpha\beta l}^2 + a_{ij\alpha\beta l}^3 \quad (10)$$

$$a_{ij\alpha\beta l}^k = \frac{1}{2} \left\{ (r_{ij}^k - r_{\alpha\beta}^l) \times (r_{ij}^{k+1 \bmod 4} - r_{\alpha\beta}^l) \right\}$$

一方、 $I = i, J = j$ の要素の面積 $A_{ij}$ は次式で計算できる。

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left| \sum_{k=0}^3 x_{ij}^k y_{ij}^{k+1 \bmod 4} - x_{ij}^{k+1 \bmod 4} y_{ij}^k \right| \quad (11)$$

Kirigamiの重なりは $A_{ij\alpha\beta l} - A_{ij} = 0$ のときに生じ、これには要素の頂点のいずれかと $r_{\alpha\beta}^l$ が一致する場合(す

なわちヒンジ点)も含むが、このときは $a_{ij\alpha\beta l}^k$ のいずれかが必ず0となる。

$$\prod_{k=0}^3 a_{ij\alpha\beta l}^k \neq 0$$

を満たす $l$ の集合を $S_{ij\alpha\beta}$ とすると、要素の頂点での重なりは許容しつつ、Kirigamiの重なりが発生しない条件は次式で表すことができる。

$$\prod_{\alpha \neq i} \prod_{\beta \neq j} \prod_{l \in S_{ij\alpha\beta}} (A_{ij\alpha\beta l} - A_{ij}) > 0 \quad (12)$$

#### 5. ヒンジ位置を設計変数とした変形量最大化

前節でKirigamiのパターンが複雑化すると、大きな剛体変形を伴うヒンジパターンを予め特定することが難しくなることが確認できたため、ヒンジ位置は自動決定できることが望まれる。また、Kirigami同士が重なり合う場合があるような解が出る場合があるのでそれらを排除する必要もある。そこで本節では、ヒンジ位置を表す0-1ベクトル $t$ を設計変数とし、最適化問題(8)により計算される $f$ を目的関数とした次のような最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && f = |u_{IJ}^2| \\ & \text{subject to} && \text{Eq. (12)} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、目的関数 $f$ は最適化問題(8)を解くことにより得られる。本最適化問題は離散変数問題となるため、発見的手法の一種であるMIDACO<sup>8)</sup>を用い、図2や図4, 図6に示すような1辺1mの正方形のみで構成されるKirigamiに対して、発見的手法と逐次二次計画法<sup>7)</sup>を併用して解く。

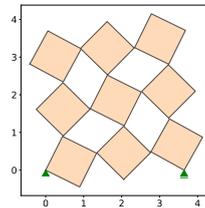


図8 解析モデル1に対する問題(13)の最適化結果

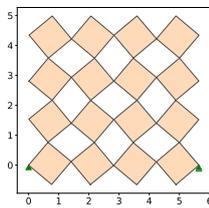


図9 解析モデル2に対する問題(13)の最適化結果

図8と図9から図2と図4のモデルに対しての展開機構の自動生成が可能であることが証明できた。しかし、図6の展開機構の自動生成の解析結果は得られなかった。

表2 解析結果  
解析モデル1 解析モデル2

$r_{i,j}^k$ [m]	4.24	5.66
$f$ [m]	5.18	7.13
$t$ [個]	12	24

## 6. ヒンジ位置のパターンを増やした際の変形量最大化

前節では隣接要素の接辺はいずれか1つの頂点でのみ回転ヒンジにより接続するために、0-1変数ベクトルを用いて2つのヒンジから1つのヒンジのみ接続するようにしていたが、ここでは隣接要素の接辺が接続する条件を追加する。図10は上下に隣接する要素の接辺の1つが固定されている例である。隣接要素の接辺の存在位

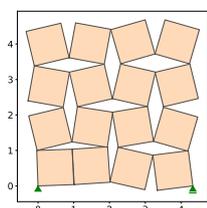


図10 隣接要素の接辺の1つが固定されている例

置を0-2変数ベクトルを用いて式(2.2)とおく。ヒンジ部における変位の適合条件は式(5)をここでも用いる。式(5a)で $t_{ij,i+1j} = 2$ のとき頂点2と頂点1を接続するヒンジと頂点3と頂点0を接続するヒンジが存在する。式(5a)で $t_{ij,i+1j} = 2$ のとき頂点2と頂点3を接続するヒンジと頂点1と頂点0を接続するヒンジが存在する。

ここで、0-2変数ベクトルを用いて $f$ を目的関数とした最適化問題(13)を解く。結果は図11のようになり、

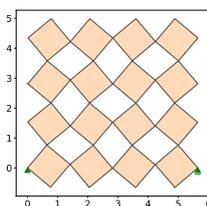


図11 解析モデル3に対する問題(13)の最適化結果

隣接要素の接辺が接続する部分が存在する場合を考慮してもすべての隣接要素の接辺でヒンジは1つしか存在しない結果となった。最適化結果は0-1変数ベクトルを用いたときと差異がなかった。

## 7. 結論

本論文では格子状 Kirigami の展開機構の幾何学的条件を定式化し、最適化手法と組み合わせることで大変形可能な展開機構の自動生成の手法を提案した。結論としては以下のようにまとめられる。

- 格子状 Kirigami には2つのヒンジパターンしか存在せず、展開機構の幾何学的条件を定式化し、最適化手法と組み合わせることで大変形可能な展開機構の自動生成が可能。
- 格子状 Kirigami ヒンジ位置のパターンとした隣接する接辺が完全に接合されている場合を考慮してもすべての隣接要素の接辺でヒンジは1つしか存在しない場合のほうが大きく展開する。

## 8. 今後の展望

本研究では、Kirigami の切り込みの数が増えると解析結果が出ないことがあったので、Kirigami の重なりを排除する制約などの制約条件の検討が必要である。またヒンジ位置のパターンで隣接する接辺が完全に接合されている場合を考慮したが、隣接する接辺に1つもヒンジが存在しない場合も考慮する必要がある。

また今回の研究では Kirigami の切り込み位置を予め設定しているので節点座標を設計変数とすることで切り込みのパターンの自動化を試みていく。そして、格子状の Kirigami 以外の形や3次元の Kirigami の展開機構の自動生成を行っていく必要がある。

### [参考文献]

- 1) K. Miura. Map, origami, and space. *Map, Journal of the Japan Cartographers Association*, Vol. 35, pp. 1–10, 1997.
- 2) 齊藤一哉. 折紙と展開構造. *応用数理*, Vol. 26, No. 1, pp. 9–14, 2016.
- 3) Gary P. T. Choi, Levi H. Dudte, and L. Mahadevan. Programming shape using kirigami tessellations. *Nature Materials*, Vol. 18, pp. 999–1004, 2019.
- 4) 雷霄雯, 中谷彰宏, 土井祐介, 松永慎太郎. 面外変形を起こすキリガミ周期構造体の分岐解析. *Journal of the Society of Materials Science, Japan*, Vol. 67, No. 2, pp. 202–207, 2018.
- 5) H. Taniyama and E. Iwase. Design of rigidity and breaking strain for a kirigami structure with non-uniform deformed regions. *Micromachines*, Vol. 10, No. 6, 2019. DOI.
- 6) Y. Tang and J. Yin. Design of cut unit geometry in hierarchical kirigami-based auxetic metamaterials for high stretchability and compressibility. *Extreme Mechanics Letters*, Vol. 471, pp. 1–15, 2015.
- 7) P. Gill, W. Murray, and M. Saunders. Snopt: An sqp algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM Review*, Vol. 47, No. 1, pp. 99–131, 2005.1.
- 8) M. Schlueter, J. A. Egea, and J. R. Banga. Extended ant colony optimization for non-convex mixed integer nonlinear programming. *Computers & Operations Research*, Vol. 36, No. 7, pp. 2217–2229, 2008.8.