

部材の密集度を考慮した骨組構造物の大域的トポロジー最適化 Global Topology Optimization of Frame Structures Considering the Density of Members

○奥菌 尚人*¹, 藤田 慎之輔*²
Naoto OKUZONO*¹, Shinnosuke FUJITA*²

*1 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 大学院生

Graduate Student, Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu

*2 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 准教授

Assoc. Prof., Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu, Dr. Eng.

キーワード : グランドストラクチャ法; 大域的最適解; トポロジー最適化; 混合整数 2 次錐計画
Keywords : ground structure method; global optimal solution;
topology optimization; mixed-integer second-order cone programming

1. はじめに

近年, 最適化手法を用いて構造物のコンプライアンスを最小化し, 高い剛性を有する形態を得る研究が盛んに行われている¹⁾²⁾. 構造物の最適化の 1 つである骨組部材の接続関係や使用されている断面の組み合わせを最適化するトポロジー最適化では設計変数に整数変数を含む離散問題となるため, 発見的手法によって最適解を求めることが多い. Rhinoceros/Grasshopper³⁾ では発見的手法に基づく最適化計算を行うことのできるコンポーネントが利用可能であり⁴⁾⁵⁾, 高い汎用性から初学者でも容易に利用可能であるが, 優良解を得るためには適切なパラメータチューニングと十分な計算時間が必要であり, 得られる解が大域的最適解である保証はない. 一方, 数理計画法を用いた場合, 定式化は複雑になるものの得られた解の最適性を数学的に保証できるという利点がある. 骨組のトポロジー最適化問題を整数計画問題として定式化すると, 数理計画法では計算コストが非常に大きく, 現実的な計算時間で規模の大きな問題を解くことは一般的に難しいとされているが, コンプライアンス最小化問題は混合整数 2 次錐計画問題として定式化できることが知られており, 同定式化によれば線形整数計画問題として定式化した場合と比較して少ない計算時間で大域的最適解が求まることが知られている⁶⁾. しかし, 建築物には力学のみならず, 施工性や経済性といった非力学的性能も同時に求められるため, それらの性能も考慮できる手法の開発が望まれている. 本研究では, 非力学的性能を部材密度という側面から評価し, いくつかの数値解析例を通じて手法の有効性を検証する.

2. 混合整数 2 次錐計画問題への定式化

節点数 n , 要素数 m , 節点変位の自由度が D の骨組構造の節点外力ベクトルを $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^D$ とした時, コンプライアンス最小化を目的としたグラッドストラクチャ法⁷⁾ によるトポロジー最適化問題は $e = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r$ に対して式 (1) のように定式化することができる⁸⁾. ただし, r 個の部材断面性能の組 $(\bar{a}_1, \bar{I}_{y1}, \bar{I}_{z1}, \bar{J}_1), \dots, (\bar{a}_r, \bar{I}_{yr}, \bar{I}_{zr}, \bar{J}_r)$ が存在し, この中から任意に部材が選択できるものとする. また, E はヤング係数, G はせん断弾性係数, $a_e, I_{ye}, I_{ze}, J_e, l_e$ はそれぞれ, 部材の断面積, 断面 2 次モーメント (y 軸と z 軸), ねじり定数, 部材長を表し, 添え字は部材番号を示し, $\mathbf{b}_{el} \in \mathbb{R}^D$ の定ベクトルと内力を表す設計変数 q_{el} を用いて節点外力ベクトルを表すことができる. \bar{V} は体積の上限値であり, t_{ej} は部材の有無を表す 0-1 変数, w_{el} は最適解においてコンプリメンタリひずみエネルギーを表す.

3. 非力学的性能の考慮

3.1. 運搬性と部材交差の考慮

本研究では, 既往の研究で一般的に用いられている図 1(a) に示すようなグラッドストラクチャではなく, 図 1(b) に示すような重複部材を考慮したグラッドストラクチャを扱う. このままでは, 部材が重複する解が最適解として得られる可能性や, 部材同士が節点以外の箇所 で交差する場合も考えられ, いずれも物理的に現実的な解ではないため, 実際の構造物を考えたときにはこれらの解は許容されない.

$$\text{minimize } f = \sum_{e=1}^m \sum_{l=1}^6 2w_{el} \quad (1a)$$

$$\text{subject to } w_{e1} + a_e \geq \left\| \begin{pmatrix} w_{e1} - a_e \\ q_{e1} \sqrt{\frac{2l_e}{E}} \end{pmatrix} \right\| \quad (1b)$$

$$w_{e2} + J_e \geq \left\| \begin{pmatrix} w_{e2} - J_e \\ q_{e2} \sqrt{\frac{2l_e}{G}} \end{pmatrix} \right\| \quad (1c)$$

$$w_{e3} + I_{ze} \geq \left\| \begin{pmatrix} w_{e3} - I_{ze} \\ q_{e3} \sqrt{\frac{6l_e}{E}} \end{pmatrix} \right\| \quad (1d)$$

$$w_{e4} + I_{ze} \geq \left\| \begin{pmatrix} w_{e4} - I_{ze} \\ q_{e4} \sqrt{\frac{2l_e}{E}} \end{pmatrix} \right\| \quad (1e)$$

$$w_{e5} + I_{ye} \geq \left\| \begin{pmatrix} w_{e5} - I_{ye} \\ q_{e5} \sqrt{\frac{6l_e}{E}} \end{pmatrix} \right\| \quad (1f)$$

$$w_{e6} + I_{ye} \geq \left\| \begin{pmatrix} w_{e6} - I_{ye} \\ q_{e6} \sqrt{\frac{2l_e}{E}} \end{pmatrix} \right\| \quad (1g)$$

$$p = \sum_{e=1}^m \sum_{l=1}^6 q_{el} \mathbf{b}_{el} \quad (1h)$$

$$\sum_{e=1}^m l_e a_e \leq \bar{V} \quad (1i)$$

$$a_e = \sum_{j=1}^r \bar{a}_{j} t_{ej} \quad (1j)$$

$$I_{ye} = \sum_{j=1}^r \bar{I}_{yj} t_{ej} \quad (1k)$$

$$I_{ze} = \sum_{j=1}^r \bar{I}_{zj} t_{ej} \quad (1l)$$

$$J_e = \sum_{j=1}^r \bar{J}_j t_{ej} \quad (1m)$$

$$\sum_{j=1}^r t_{ej} \leq 1 \quad (1n)$$

$$t_{ej} \in \{0, 1\} \quad (1o)$$

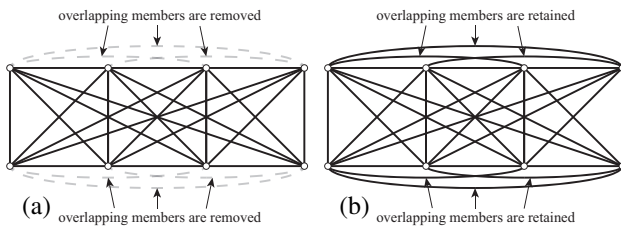


図 1: 一般的なグラウンドストラクチャ (a) と本研究で扱うグラウンドストラクチャ (b)

そこで、重複もしくは交差する部材の組数を q 、部材番号の組を

$$\mathbf{C} = ((C_{11} \ C_{12}) \ \dots \ (C_{q1} \ C_{q2})) \quad (2)$$

とおき、次の制約を加えることで、部材の重複や節点以外での交差を回避する。

$$\sum_{j=1}^r t_{\alpha j} + \sum_{j=1}^r t_{\beta j} \leq 1, \quad \alpha = C_{k1}, \ \beta = C_{k2} \quad (3)$$

3.2. 節点数を考慮した制約

剛接架構の接合部数は施工コストに影響する。節点の数は接合部数の数に直結するため最適解の骨組が高々 \bar{n} 個の節点数で構成されるような制約を考える。ある節点 i に接続されている部材の部材番号の集合を $S(i) \subseteq \{1, \dots, m\}$ ($i = 1, \dots, n$) と定義する。変数 z_i を

$$z_i = \sum_{e \in S(i)} a_e, \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

で定める。節点 i に対して、0-1 変数 $s_i \in \{0, 1\}$ を用いてその節点の有無を表すことにする。グラウンドストラクチャに含まれる部材の長さの最小値を l_{\min} とすると、体積制約 $\sum_{e=1}^m l_e a_e \leq \bar{V}$ の下では

$$\sum_{e=1}^m a_e \leq \frac{\bar{V}}{l_{\min}} \quad (5)$$

が常に成り立つ。したがって s_i と z_i の関係は、

$$0 \leq z_i \leq \frac{\bar{V}}{l_{\min}} \cdot s_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

と書ける(ただし $0 \leq z_i$ は自明)。また、節点数の制約は次式で記述できる。

$$\sum_{i=1}^n s_i \leq \bar{n} \quad (7)$$

3.3. 接合角度を考慮した制約

接合部の角度が極端に鋭角になると、溶接が困難になるなど、施工性が著しく低下するため、接合角度に下限値 $\bar{\theta}$ を設けることを考える。接合角度が $\bar{\theta}$ を下回る部材の組数を q' 、部材番号の組を

$$\mathbf{D}_{q'} = ((D_{11} \ D_{12}) \ \dots \ (D_{q'1} \ D_{q'2})) \quad (8)$$

とおく。このとき、次の制約を加えることで、部材の接合角度を $\bar{\theta}$ 以上に制限することができる。

$$\sum_{j=1}^r t_{\alpha' j} + \sum_{j=1}^r t_{\beta' j} \leq 1, \quad \alpha' = D_{k'1}, \ \beta' = D_{k'2} \quad (9)$$

3.4. 各節点に接続する部材数を考慮した制約

1つの接合部に多くの部材が密集すると、その箇所の部材密度が高くなり、溶接量の増加や取合いの複雑さを生み、経済性と施工性の双方が低下するため、各節点に接続する部材数の上限値 \bar{j} を設けることを考える。第3.2項にて定義した部材番号の集合 $S(i)$ を用いて次のような形で各節点に接続する部材数を \bar{j} 以下に制限することができる。

$$\sum_{e \in S(i)} \sum_{j=1}^r t_{ej} \leq \bar{j} \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

3.5. 複数の大域的最適解の排除

本論文で取り扱う最適化問題では、節点数の制約に余裕がある場合、例えば 2×2 の鉛直荷重を受けるグラウンドストラクチャに対して、節点数上限値 \bar{n} を5とした解析を行った際に図2のようにコンプライアンス値の等しい複数の大域的最適解が得られることが考えられる。この場合、施工性・経済性を考慮した場合最も節点数の少ない解(ここでは(a)の大域的最適解)が選択されることが望ましい。

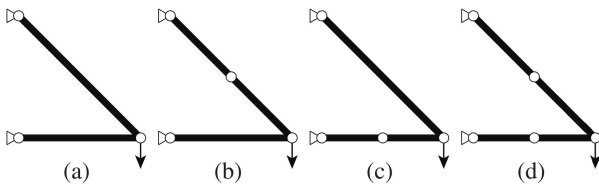


図2: 複数の大域的最適解の可能性

よって、十分小さな正の値 β を用いた節点数に対するペナルティ関数を用いて目的関数を式(11)のような形に置き換える。

$$\sum_{e=1}^m \sum_{l=1}^6 2w_{el} + \beta \sum_{i=1}^n s_i \quad (11)$$

これにより、複数の大域的最適解の中から最も施工性や経済性を有した大域的最適解を得ることができる。以上より、本研究で解く最終的な最適化問題は、コンプライアンス最小化問題(1)に対して、目的関数を式(11)と置き換え、第3節で示した制約式(3), (10)を元に、(7), (9)と組み合わせることで部材密度に節点数や接合角度を考慮した最適化を行うことができる。

4. 数値解析例

4.1. 解析条件

解析対象モデルとして図3に示すような先端の2つの節点に外力として鉛直下向きにそれぞれ50kNの荷重を作用させた片持ち梁のグラウンドストラクチャを考える。部材断面は表1のような鋼管を想定した断面部材から

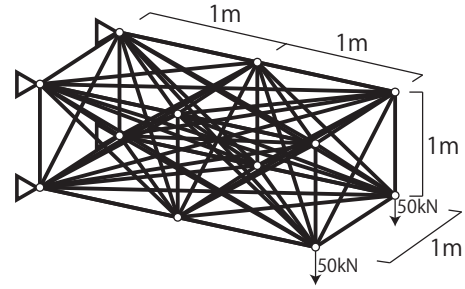


図3: 解析モデル

表1: 部材断面リスト

j	1	2
ヤング係数 [$\times 10^8 \text{kN/m}^2$]	2.1	2.1
ポアソン比	0.3	0.3
断面積 [m^2]	0.001	0.003
断面2次モーメント (y軸, z軸) [$\text{m}^4 \times 10^{-7}$]	7.58	68.2
ねじり定数 [$\text{m}^4 \times 10^{-6}$]	1.52	13.6

選ぶものとする ($r = 2$)。接合部は剛接合とし体積上限値は部材規模を考慮し $\bar{V} = 0.05 [\text{m}^3]$ とし、最適化問題(1)に第3節で定式化した様々な制約を考慮した最適化問題を解くことを行う。最適化ソルバーには MOSEK⁹⁾ を用いる。

4.2. 解析結果と考察

解析は、部材の重複及び交差を制約(3)によって全ての解析結果にて許容されないものとし、まず部材密度、節点数、接合角度といった非力学的性能に関わる制約を設けずに、純粋なコンプライアンス最小化問題(1)を解いた。図4は、コンプライアンス最小化問題(1)を解くことにより得られた各制約条件下における最適トポロジーを示し、各図において部材の線の太さは断面積の大きさに比例しており、○は剛接合にて接合される節点を表す。また、各図の下部には目的関数値、体積、制約に影響する定数 $\bar{n}, \bar{j}, \bar{\theta}$ を示している。

結果を容易に確認できるようにここでは塗りつぶされている節点を最適トポロジーにおいて用いられた節点、白色の節点を最適トポロジーにおいて用いられなかった節点という識別をしている。まず、図4(a)に純粋なコンプライアンス最小化問題(1)を解くことにより得られた最適トポロジーを示す。本最適解は、図4の中で最もコンプライアンス値の小さい最適トポロジーであることにに対し、節点によって部材の密集度にばらつきがあり、一部の節点では5つの部材が密集しており、溶接量の増加や取合いの複雑さが問題となる恐れがある。よって、施工性や経済性を考えた場合には必ずしも適切な設計解ではない。そこで、図4(a)の最適トポロジーにおいて1つの節点に取り付く最大部材数が5であるため、この数値を基準に1つの節点に取り付く部材数の上限値 \bar{j} を4から小さくしながら繰り返し最適化を行い、部材密度を下げていった結果、 $\bar{j} = 1$ としたところで実行不可能とな

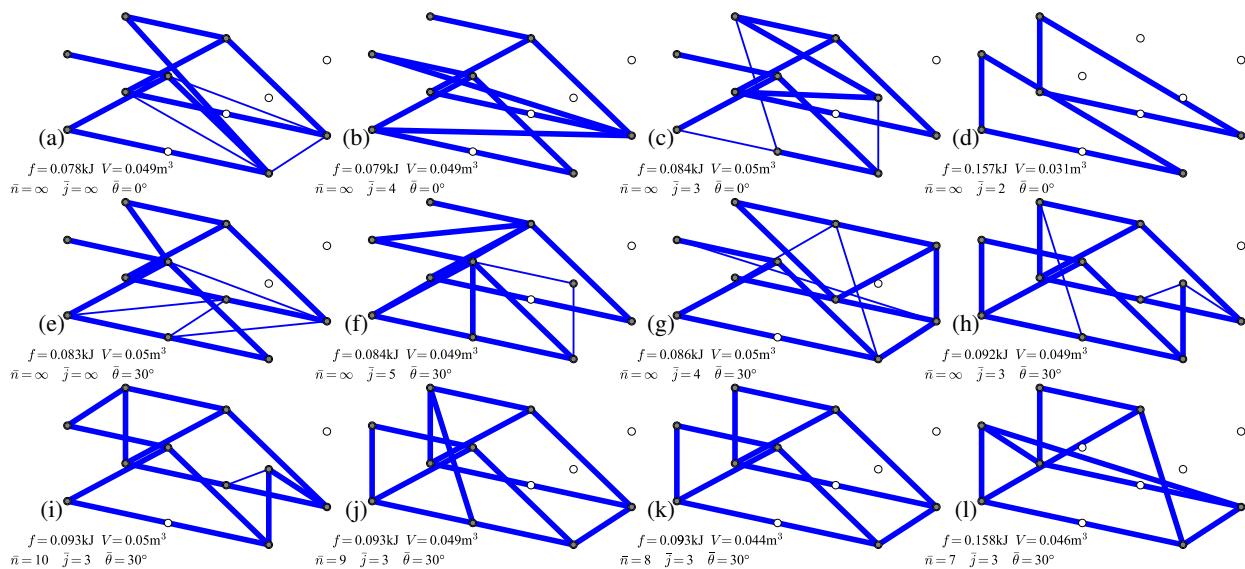


図 4: 各制約下において得られた最適トポロジー

った。それらの結果を図 4(b)~(d) に示す。部材の密集度が \bar{j} の値を小さくするにつれて低下していることが各最適トポロジーより確認することができ、一方でコンプライアンス値は徐々に増加しているためコンプライアンス値と部材密度の間にはトレードオフの関係があると言える。

これらの解は、全て接合角度制約 (9) が考慮されていないため得られた最適トポロジーの中には極端に鋭角な接合角度を有した解も存在する。そこで次に、接合角度下限値 $\bar{\theta}$ を 30° に設定することで接合角度を考慮した解析を同様の手順にて行った。その結果、 $\bar{j} = 2$ としたところで数時間経っても解が得られなかった。その結果得られた最適トポロジーを図 4(e)~(h) にそれぞれ示す。全ての最適トポロジーにおいて極端に鋭角な接合角度による接合部は排除されている。一方で、接合角度制約 (9) の影響により、実行可能なトポロジーが限定され、全体的に接合角度に制限を設けなかった場合の最適トポロジーと比較するとコンプライアンス値が増加していることが確認できる。さらに、図 4(h) では、節点数が 11 となっている一方で、部材の密集は回避できているため得られた最適トポロジーに対して節点数と部材密度の間に相関はないということが言える。このような解に対して節点数が少ない場合の解を得たい場合、節点数制約 (7) を有効にするために、節点数上限値 \bar{n} を設定すると良いと考えられる。そこで最後に、部材密度、節点数、接合角度を同時に考慮した場合の解析例として図 4(h) の解を基準に $\bar{n} = 10, 9, 8, 7$ とした時の最適トポロジーを図 4(i)~(l) にそれぞれ示す。各最適トポロジーが制約 (10), (7), (9) をそれぞれ満たしていることが確認でき、図 4(h) と図 4(j) の最適トポロジーの間に大きなコンプライアンス値の差はないため、図 4(h) の解に対して、図 4(j) の解の方が力学的性能及び非力学的性能双方の面から優れていると言える。

5. おわりに

本研究の成果により、部材密度を考慮した骨組の剛性最大化問題が MISOCP として定式化可能で、大域的最適解を獲得可能であることが確認された。また、部材密度だけでなく節点数や接合角度も考慮することにより、より実務的な場面での活用が期待できる。一部最適化問題は現実的な時間内で解くことができなかったため、その原因の究明を今後の課題とする。

【参考文献】

- 1) 高坂 憲治, 松本 慎也, 藤井 大地: ESO 法とグラウンドストラクチャ法を用いた骨組構造物の位相最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.81, No.721, pp.547-553, 2016
- 2) 寒野 善博: 不確実な外力の下でのロバストコンプライアンス最適化問題の定式化について, 日本建築学会構造系論文集, Vol.80, No.710, pp.601-607, 2015
- 3) D. Rutten: Grasshopper -Computing Architectural Concepts-, the conference Advances in Architectural Geometry, Vienna, Austria, pp.18-21, 2010
- 4) M. Makki and M. Showkatbakhsh and Y. Song, WALLACEI -An Evolutionary Multi-Objective Optimization and Analytic Engine for Grasshopper 3D-, <https://www.wallacei.com> (accessed 2020-06-20)
- 5) D. Rutten, Galapagos: On the Logic and Limitations of Generic Solvers, Architectural Design, Vol.83, No.8, pp.132-135, 2013
- 6) Y.Kanno, Mixed-integer second-order cone programming for global optimization of compliance of frame structure with discrete design variables, Struct.Multidisc.Optim., Vol.54, pp.301-316, 2016
- 7) 藤井 大地, 真鍋匡利, 高田豊文: グラウンドストラクチャ法による建築構造の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, Vol.73, No.633, pp.1967-1973, 2008
- 8) 藤田慎之輔, 寒野善博: 混合整数 2 次錐計画法による 3 次元骨組構造のトポロジー最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.82, No.732, pp.193-201, 2017
- 9) E.D.Andersen and K.D.Andersen, The MOSEK Interior Point Optimizer for Linear Programming: An Implementation of the Homogeneous Algorithm., In H Frenk, K Roos, T. Terlaky, and S. Zhang, editors, High Performance Optimization, pp.197-232, 2000