

連続変数問題として解く鋼構造設計基準の応力制約を設けた ラチスシェルの部材断面最適化

Cross-sectional Optimization of Latticed Shells with Stress Constrains Based on Design Standard for Steel Structures Solved as Continuous Variable Problems

○田村 直大*¹, 藤田 慎之輔*²
Naohiro TAMURA*¹, Shinnosuke FUJITA*²

*1 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 大学院生

Graduate Student, Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu

*2 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 准教授

Assoc. Prof., Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu, Dr. Eng.

キーワード : 逐次二次計画法; 組合せ最適化; 連続変数問題

Keywords : Sequential quadratic programming; combinatorial optimization; continuous variable problems.

1. 研究背景

近年鋼構造骨組を対象とした、構造的に合理的な部材断面の組合せを最適手法により獲得する研究¹⁾が数多くおこなわれている。それらの研究は規格材の利用を念頭に置いた場合、最適化問題は離散変数問題として定式化され、発見的手法が用いられる。発見的手法は長時間の計算コストをかけることにより一定の最適性が保証される。一方、数理計画法は比較的短時間で解くことが可能であり、局所最適性が数学的に保障される。しかし離散変数を扱うことが困難なため鋼構造骨組の断面最適化にそのまま適用することができない。そこで既往の研究²⁾では、断面寸法を設計変数として用いることで連続変数問題として定式化し、逐次二次計画法で最適化し、そのうち各要素の断面を最適解の断面寸法に近い規格材に置換する手法が提案され、優良な解形態の取得に成功している。しかし断面寸法を設計変数とするため、断面形状は1種に限定される。そこで本研究では鋼管とH形鋼の共通のパラメータである断面積と断面二次モーメントを設計変数とすることで複数の断面形状が併用されたラチスシェルの断面最適化を提案する。また、最適化において鋼構造設計基準に基づく応力制約を設けることで、応力についても考慮した最適化を行う。そして、同様の問題を発見的手法でも解き、最適解、解析時間を比較することで、本提案手法の有効性を示す。

2. 最適化方法

本節では、鋼管とH形鋼が併用された単層ラチスシェルの部材断面最適化を発見的手法と逐次二次計画法で解くため、それぞれのアルゴリズムについて概説

する。本研究では r 種類の部材リストを用い、部材リスト内の断面性能、断面積、 y (強)軸および z (弱)軸まわりの断面二次モーメント、ねじり定数、 y (強)軸および z (弱)軸まわりの断面係数を集めたベクトルをそれぞれ \bar{A} , \bar{I}_y , \bar{I}_z , \bar{J} , \bar{Z}_y , \bar{Z}_z とする。

$$\bar{A} = [\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_r]^T \quad (1a)$$

$$\bar{I}_y = [\bar{I}_{y_1}, \dots, \bar{I}_{y_r}]^T \quad (1b)$$

$$\bar{I}_z = [\bar{I}_{z_1}, \dots, \bar{I}_{z_r}]^T \quad (1c)$$

$$\bar{J} = [\bar{J}_1, \dots, \bar{J}_r]^T \quad (1d)$$

$$\bar{Z}_y = [\bar{Z}_{y_1}, \dots, \bar{Z}_{y_r}]^T \quad (1e)$$

$$\bar{Z}_z = [\bar{Z}_{z_1}, \dots, \bar{Z}_{z_r}]^T \quad (1f)$$

2.1. 離散変数問題として解く断面最適化

各要素の、選択された部材リストの断面番号を集めたベクトルを \mathbf{x} とする。

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_m]^T \quad (2)$$
$$x_e \in [1, \dots, r]$$

要素 e の断面性能は部材リスト x_e 番目の断面性能 $\{\bar{A}_{x_e}, \bar{I}_{y_{x_e}}, \bar{I}_{z_{x_e}}, \bar{J}_{x_e}, \bar{Z}_{y_{x_e}}, \bar{Z}_{z_{x_e}}\}$ となる。

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{\mathbf{A}, \mathbf{I}_y, \mathbf{I}_z} \quad \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \\ & \text{subject to} \quad V - V_{\max} \leq 0 \\ & \quad A_e = \bar{A}_{x_e} \quad e = 1, \dots, m \\ & \quad I_{y_e} = \bar{I}_{y_{x_e}} \quad e = 1, \dots, m \\ & \quad I_{z_e} = \bar{I}_{z_{x_e}} \quad e = 1, \dots, m \\ & \quad J_e = \bar{J}_{x_e} \quad e = 1, \dots, m \\ & \quad Z_{y_e} = \bar{Z}_{y_{x_e}} \quad e = 1, \dots, m \\ & \quad Z_{z_e} = \bar{Z}_{z_{x_e}} \quad e = 1, \dots, m \\ & \quad k_e \leq 1.0 \quad e = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3)$$

ここで \mathbf{u} は節点変位ベクトル, \mathbf{K} は線形弾性剛性行列, V は骨組の総体積, V_{\max} は V の上限値を示す. k_e は要素 e 番目の検定比を示し, 本研究では鋼構造設計基準に基づき, 式 (4) により検定比を算出する. $\sigma_c, \sigma_t, \sigma_{by}, \sigma_{bz}$ はそれぞれ圧縮応力度, 引張応力度, y, z 軸回りの曲げ応力度を, f_c, f_t, f_b はそれぞれ許容圧縮応力度, 許容引張応力度, 許容曲げ応力度を示す.

$$k_e = \begin{cases} \frac{\sigma_{ce}}{f_{ci}} + \frac{\sigma_{te}}{f_{ti}} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{bye}}{f_{bi}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{bze}}{f_{bi}}\right)^2} & \dots \text{鋼管の場合} \\ \frac{\sigma_{ce}}{f_{ci}} + \frac{\sigma_{te}}{f_{ti}} + \frac{\sigma_{bye}}{f_{bi}} + \frac{\sigma_{bze}}{f_{bi}} & \dots \text{H 形鋼の場合} \end{cases} \quad e = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, r \quad (4)$$

離散変数問題として解く部材断面最適化では, 式 (3) の最適化問題を発見的手法により解く. ソルバーに MIDACO³⁾ を用い, 解析時間は 1 週間とする. この離散変数問題として解く方法を method1 とする.

2.2. 連続変数問題として解く断面最適化

弾性解析に用い, 鋼管と H 形鋼の共通のパラメータである断面積, y 軸および z 軸まわりの断面二次モーメントを設計変数とすることで連続変数問題として定式化し, 逐次二次計画法を用いて鋼管と H 形鋼が併用されたラチスシェルのひずみエネルギー最小化をおこなう. その後, 得られた最適解をもとに規格材に置換する処理をおこなう.

連続変数問題として解く最適化問題の定式化

骨組を構成する各要素の断面積, y 軸および z 軸まわりの断面二次モーメントを集めたベクトルをそれぞれ $\mathbf{A}, \mathbf{I}_y, \mathbf{I}_z$ と定義する. また, ねじり定数は断面二次モーメントの比から式 (8) により算出する. ここで m は要素数である.

$$\mathbf{A} = [A_1, \dots, A_m]^\top \quad (5)$$

$$\mathbf{I}_y = [I_{y1}, \dots, I_{ym}]^\top \quad (6)$$

$$\mathbf{I}_z = [I_{z1}, \dots, I_{zm}]^\top \quad (7)$$

$$J_e = 2 \times \frac{I_{ye}}{I_{ze}} \times I_{ze} = 2I_{ye} \quad e = 1, \dots, m \quad (8)$$

規格材の断面積 \bar{A} と y 軸まわりの断面二次モーメント \bar{I}_y の関係から y 軸まわりの断面二次モーメント \mathbf{I}_y の上下限値を定義する 4 次の近似曲線 $I_{ye}^u(A_e), I_{ye}^l(A_e)$ を最小二乗法により導く. z 軸まわりの断面二次モーメントの制約曲線は y 軸まわりの断面二次モーメントとも関

連付けるため, 断面積 $bs\bar{A}$ と式 (9) で算出する y, z 軸まわりの断面二次モーメントの和の関係から 4 次の上下限曲線 $I_{yz_e}^l(A_e), I_{yz_e}^u(A_e)$ を導く.

$$\bar{I}_{yz} = \bar{I}_y + \bar{I}_z \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{A}, \mathbf{I}_y, \mathbf{I}_z}{\text{minimize}} && \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{K} \mathbf{u} \\ & \text{subject to} && V - V_{\max} \leq 0 \\ & && A_{\min} \leq A_e \leq A_{\max} && e = 1, \dots, m \\ & && I_{ze} - I_{ye} \leq 0 && e = 1, \dots, m \\ & && I_{ye}^l(A_e) \leq I_{ye} \leq I_{ye}^u(A_e) && e = 1, \dots, m \\ & && I_{yz_e}^l(A_e) \leq I_{ye} + I_{ze} \leq I_{yz_e}^u(A_e) && e = 1, \dots, m \\ & && k_e \leq 1.0 && e = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (10)$$

ここで A_{\max}, A_{\min} は断面積の上下限値, k_e は e 番目の要素の検定比である. 連続変数問題の最適化ではこの最適化問題を逐次二次計画法により解く. ソルバーに snopt⁴⁾ を用いる. この連続変数問題を解く過程を method2-1 とする.

規格断面への置換

逐次二次計画法により得られた最適化を規格時へ置換する方法を下に示す. まず method2-1 で得られた最適解から各要素の断面性能が最も近い規格断面へ置換し, 弾性解析を行い, 検定比が 1.0 を越えた要素がある場合, 修正作業をおこなう. method2-1 で得られた最適解を集めたベクトルをそれぞれ $\mathbf{A}^{opt}, \mathbf{I}_y^{opt}, \mathbf{I}_z^{opt}$ とする.

$$\mathbf{A}^{opt} = [A_1^{opt}, \dots, A_m^{opt}]^\top \quad (11)$$

$$\mathbf{I}_y^{opt} = [I_{y1}^{opt}, \dots, I_{ym}^{opt}]^\top \quad (12)$$

$$\mathbf{I}_z^{opt} = [I_{z1}^{opt}, \dots, I_{zm}^{opt}]^\top \quad (13)$$

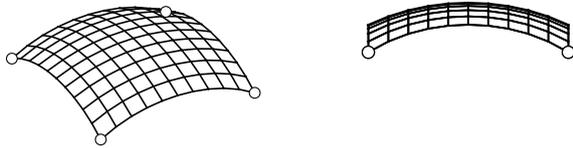
step1 e 番目の要素の各最適解と, 部材リストの各断面性能の差の最小値 δ_e を与える部材リスト i 番目の規格材に置換する.

$$\delta_e = \min \left\{ \left(1 - \frac{A_e^{opt}}{A_1}\right)^2 + \left(1 - \frac{I_{ye}^{opt}}{I_{y1}}\right)^2 + \left(1 - \frac{I_{ze}^{opt}}{I_{z1}}\right)^2, \right. \\ \vdots \\ \left. \left(1 - \frac{A_e^{opt}}{A_r}\right)^2 + \left(1 - \frac{I_{ye}^{opt}}{I_{yr}}\right)^2 + \left(1 - \frac{I_{ze}^{opt}}{I_{zr}}\right)^2 \right\} \\ e = 1, \dots, m \quad (14)$$

step2 置換後のモデルを弾性解析し, 全要素の検定比が 1.0 を下回っている場合置換終了. 検定比が 1 を上回った要素がある場合, step3 へ.

step3 検定比が 1.0 を上回った要素は次に断面積の大きい部材リストの断面へ修正し, step2 に戻る.
この規格材に置換する過程を method2-2 とする.

3. 解析モデル



(a) 鳥瞰図 $f = 15.54[\text{kNm}]$
(b) 立面図 $V = 13.83[\text{m}^3]$

図 1: 解析モデル

図 1 に示すスパン 30 m × 30m, ライズ 10m の裁断球殻シェルをモデルに用いる. 境界条件は図中に○で表した四隅を固定支持とする. 図下の f, V は初期形状のひずみエネルギーと総体積を示す. 外力は積載荷重として 1kN/m^2 の面荷重を各節点に振り分けて与え, 自重として 77kN/m^3 を作用させる. ヤング率は $2.05 \times 10^5 \text{N/mm}^2$, ポアソン比は 0.3 とする. 初期形状の部材断面は全て外径 406.4mm, 板厚 16mm の円形鋼管で構成されている. 体積の上限値は初期形状の総体積 $V_{\max} = 27.66[\text{m}^3]$, 断面積の下限値は部材リストの最小値 $A_{\min} = 0.000981[\text{m}^2]$, 上限値は $A_{\max} = 0.04[\text{m}^2]$ とする. 部材リストには種類数 $r = 199$ のリストを用いる. 図 2, 図 3 に部材リストの規格材についての散布図および, 2.2 節で述べた上下限を定義する 4 次の近似曲線の式 (15) をそれぞれプロットしたものを示す. 計算機には CPU: Intel(R) Core(TM) i7-2600K @3.40GHz, MEM: 16GB を用いる.

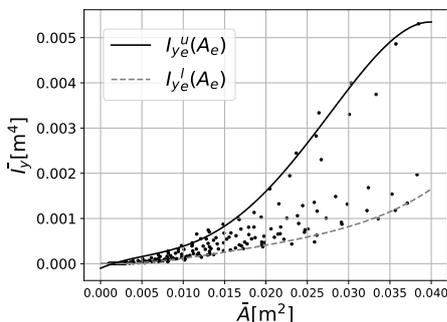


図 2: 部材リスト (\bar{I}_y)

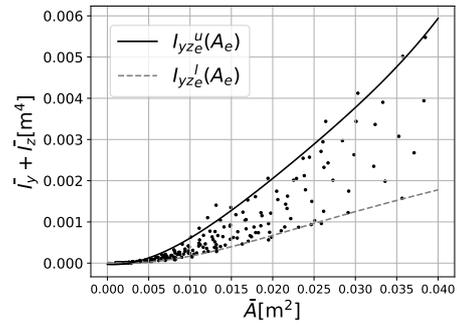


図 3: 部材リスト ($\bar{I}_y + \bar{I}_z$)

$$I_{y_e}^u(A_e) = -9014.9A_e^4 + 595.15A_e^3 + 7.9117A_e^2 + 0.0773A_e - 0.0001 \quad (15a)$$

$$I_{y_e}^l(A_e) = 1507.4A_e^4 - 100.33A_e^3 + 2.8486A_e^2 - 0.0088A_e + 0.000008 \quad (15b)$$

$$I_{yz_e}^u(A_e) = 2942.8A_e^4 + -266.29A_e^3 + 9.9862A_e^2 - 0.0125A_e - 0.000003 \quad (15c)$$

$$I_{yz_e}^l(A_e) = 673.7A_e^4 - 87.462A_e^3 + 3.9272A_e^2 - 0.0163A_e + 0.000026 \quad (15d)$$

4. 最適化結果

表 1 に初期形状と各 method におけるひずみエネルギー, 骨組総体積, 解析時間, 最大検定比を示す. method1 の解析時間については最適解のひずみエネルギーが現れたときの時間とする (図 7 参照). 図 4 に method1 の最適化結果の部材配置, 図 5 に method2-1 の部材配置, 図 6 に method2-2 の部材配置をそれぞれ示す. 図 6 は method2-2 の step1 が終了した時点での部材配置を (a) に, method2-2 のすべての step が終了した部材配置を (b) にそれぞれ示している. 線の太さは部材の断面積に比例しており, 鋼管は黒の直線, H 形鋼が赤の破線で示されている. method2-1 の部材配図 (図 5) は, 連続変数問題の最適解のため断面形状が存在していないので, すべて黒の直線で示されている. また図 8~10 は各要素の検定比を示しており, 図 10 は部材配置図同様に修正前後のものを示している. また検定比が 1.0 を超えている部材を赤の × 印で示している.

表 1: 解析結果

	初期形状	method1	method2-1	method2-2
f [kNm]	15.54	2.98	2.62	3.05
V [m ³]	13.83	12.66	13.55	15.62
t [s]	-	215029	3671.48	1.03
k_{max}	0.78	0.30	0.19	0.99

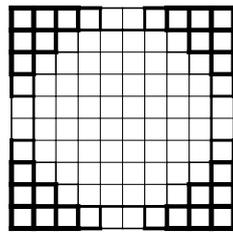
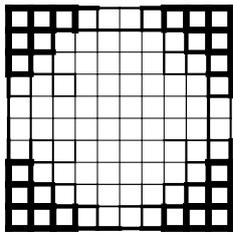
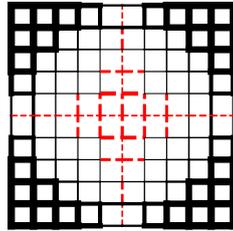
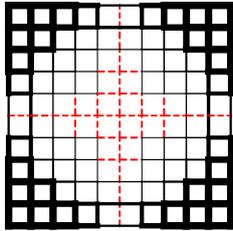


図 4: 部材配置図 (method1) 図 5: 部材配置図 (method2-1)



(a) 修正前 (b) 修正後

図 6: 部材配置図 (method2-2)

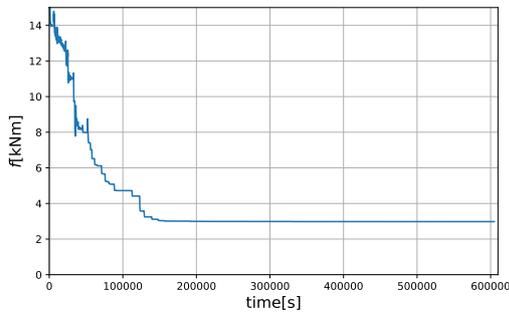


図 7: method1 収束履歴

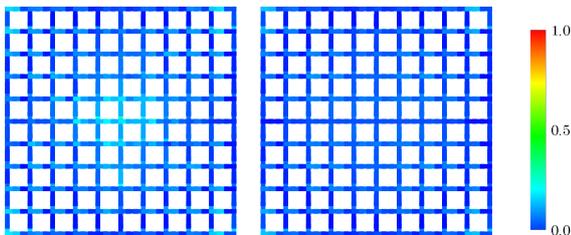


図 8: 検定比図 (method1)

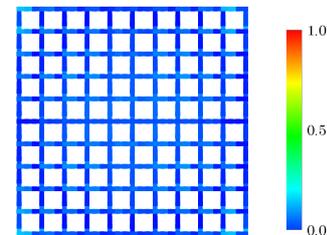
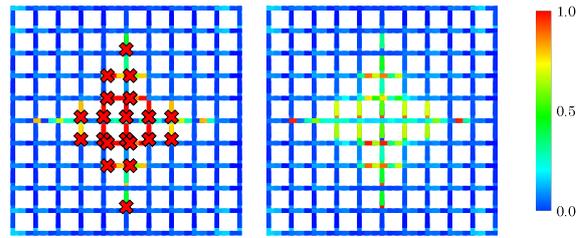


図 9: 検定比図 (method2-1)

表 1 から逐次二次計画法を用いることにより、発見的手法による最適化のおよそ 1/50 の計算コストで、発見的手法の最適解と近い解を取得することに成功している。部材配置はどちらの手法においても支持点近傍に断面積の大きい鋼管が選ばれた。また、発見的手法による最適化では H 形鋼が一つも選ばれず、逐次二次計画法求めた最適解ではシェルの中央付近に H 形鋼が選択されるという違いがみられた。検定比については、規格材に置換することでシェル中央の部材が多く検定比を上回ったが、修正のステップにより置換後のモデルも検定比を満



(a) 修正前 (b) 修正後

図 10: 検定比図 (method2-2)

たすことに成功している。しかし修正により、体積の上限値である初期形状の体積を少し上回った。一度目の置換では多くの部材が検定比 1.0 を上回っており、最適解に近い断面性能の規格断面が存在せず、検定比を満たせなかったと考えられる。

5. 結論

本研究では鋼構造骨組を対象とした部材断面最適化を、発見的手法に比べ計算コストが低い逐次二次計画法で解く手法を提案した。解析結果から得られた知見を以下にまとめる。

- 部材断面最適化を部材の断面性能を設計変数として用いることで連続変数問題として定式化し、逐次二次計画法で解くことは可能である。
- 本提案手法の置換方法により連続変数問題の最適解と近い規格材へ置換することが可能。
- 部材配置は発見的手法により解いた最適解に近い配置となるが、全体的に断面積が大きい部材が選択される。

今後の展望として、置換前後で誤差をより小さくできる制約や置換方法の検討が考えられる。

【参考文献】

- 1) 藤田慎之輔, 大崎純. 部材断面と形状の同時最適化によるラチスシェルの重量最小化. 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 709–710, 2015.9.
- 2) K. Takeshita and S. Fujita. Combinatorial optimization of standardized member cross sections of latticed shells as a continuous optimization problem. *Journal of Structural Engineering (Transactions of AIJ)*, No. 67B, pp. 173–181, 2021.3.
- 3) M. Schlueter, J. A. Egea, and J. R. Banga. Extended ant colony optimization for non-convex mixed integer nonlinear programming. *Computers & Operations Research*, Vol. 36, No. 7, pp. 2217–2229, 2008.8.
- 4) P. Gill, W. Murray, and M. Saunders. Snopt: An sqp algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM Review*, Vol. 47, No. 1, pp. 99–131, 2005.1.