ペンタグラフェンの幾何形状に基づくオーゼティック構造の力学特性

Mechanical Properties of Auxetic Structures Inspired by the Geometrical Configuration of Penta-graphene

○堺 雄亮[*1]
Yusuke SAKAI[*1]

*1 株式会社ソニーコンピュータサイエンス研究所 京都研究室　アソシエートリサーチャー　博士（工学）
Associate Researcher, Kyoto Laboratory, Sony Computer Science Laboratories, Inc., Ph.D.

キーワード：五角形格子; オーゼティック構造; 形状設計; アクティブ・ベンディング，フラストレーション
Keywords: Pentagonal grid; Auxetic structure; Shape design; Active bending; Frustration.

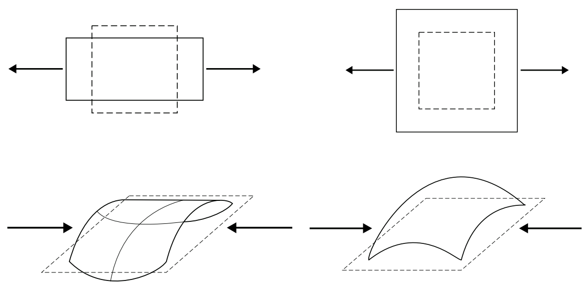
1. はじめに

機械的メタマテリアルは，材料特性ではなく構造特性により力学特性が決定される材料および構造と定義され，自然界では稀有な力学特性を持つ人工構造として広く知られる [1]．デジタル・ファブリケーション技術の普及は，複雑な形状の構造を積極的に活用する流れに寄与している．そのため，建築や機械等の設計に機械的メタマテリアルを利用する試みが見られる．筆者らは，機械的メタマテリアルを用いたベンディングアクティブ・グリッドシェルの形状設計法を提案しており，平面構造から複雑な曲面を容易かつ多様に生成するための手法を示している [2, 3]．

機械的メタマテリアルの一種であるオーゼティック構造は，負のポアソン比を持つ構造を指す名称である [2, 3]．図 1 は，平面的な構造の面内および面外変形について，ポアソン比の正負によって生じる力学特性の差異を示している．図 1 の上段は面内変形，下段は面外変形の概要を表し，点線は変形前，実線は変形後の形状を表す．図 1(a)はポアソン比が正である通常の構造の変形を示しており，面外変形時に鞍型の曲面を生成しやすい．一方，図 1(b)はオーゼティック構造の変形を示し，面外変形時にドーム型の曲面を生成しやすい．

オーゼティック構造は，ある一定の規則を持つ幾何学的な内部構造のパターンで構成される．オーゼティック構造の幾何形状は文献 [4]で詳細に分類されている．この分類の例外となる内部構造からなるオーゼティック構造として，図 2 のような幾何形状を持つペンタグラフェンがある [5]．ペンタグラフェンは凸な五角形パターンに基づく炭素材料であり，微小な厚みを有する．この幾何特性は，従来の平面（グラフェンシート等）あるいは立体（フラーレン等）の炭素材料とは異なる．Winczewski and Rybicki はペンタグラフェンの幾何形状に基づき，均一な五角形パターンで構成される炭素材料の形状設計法を提案しており，この炭素材料のポアソン比が五角形の形状および厚みによって調整できることを示している [6]．したがって，建築や土木，機械等における機械的メタマテリアルとしての応用が期待できる．しかし，文献 [5, 6]の数値解析では，これらのマクロスケールの骨組構造では無視できない曲げ変形の影響を考慮していない．そのためペンタグラフェンの幾何形状に基づく骨組構造の力学特性の検証は未だ不十分であり，実用化は難しい．以下では，この骨組構造を Bending-Active Penta-Grid (BAPG) と呼ぶ．

本報告では，パラメトリック・スタディによる BAPG の幾何形状と面内変形に対するポアソン比の関係を検証する．また，物性物理学におけるフラストレーションの概念から着想を得た形状設計法を提案する．さらに，BAPG に面外変形を与えて生成した曲面を例示し，曲面の形状とポアソン比の正負との関係を示す．



(a)　ポアソン比が正　　(b)　ポアソン比が負
図 1　面内変形に対するポアソン比と変形形状の関係

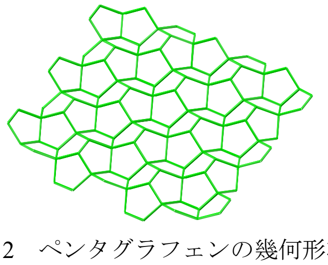
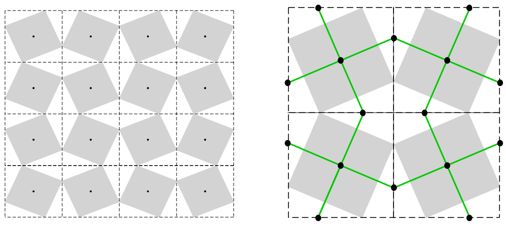
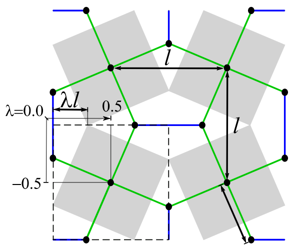


図 2　ペンタグラフェンの幾何形状

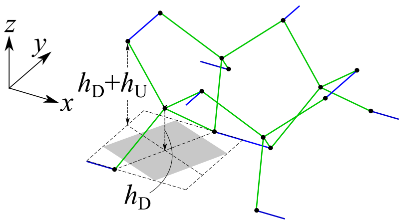
日本建築学会情報システム技術委員会
第45回情報･システム･利用･技術シンポジウム論文集，176-179，2022年12月，東京
Proceedings of the 45th Symposium on Computer Technology of Information，
Systems and Applications，AIJ，176-179，Dec.，2022，Tokyo



(a)　回転四辺形ユニット　(b)　4 価頂点の形成



(c)　3 価頂点および五角形パターンの形成とパラメータ



(d)　頂点の移動と 4 ユニットからなる BAPG の形状

図 3　BAPG の形状設計法

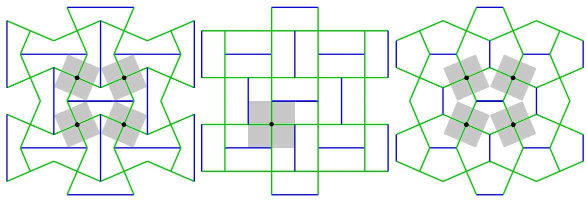
2. 五角形パターンに基づく BAPG の形状設計法

2.1. 回転四辺形ユニットを用いた五角形格子の導出

BAPG を構成する五角形格子は，図 3(a)の正方格子状に配置された回転四辺形ユニット（灰の領域）の双対として導出する．回転四辺形ユニットの頂点は図 3(a)内の点線上にあるものとし，隣接するユニット間を結合する．

まず，図 3(b)のように各四辺形の中心点から各辺に垂直二等分線（緑の線分）を作成して 4 価頂点を形成する．次に，図 3(c)に示す青の線分で頂点間を結び 3 価頂点を形成する．これにより，五角形の平面パターンが得られる．さらに，図 3(d)のように，z 方向に対して 4 価頂点を h_Dだけ，3 価頂点のうち y 軸に平行な部材に接続する点を h_D+h_U だけ移動させて BAPG の幾何形状を得る．

回転四辺形ユニットをそれぞれの中心点まわりに回転させると，五角形パターンの形状が変化する．図 3(c)に示す形状パラメータλは$-0.5 \leq \lambda \leq 0.5$ の範囲にある．点線の四辺形の頂点と回転四辺形の頂点を一対一に対応させ，対応する頂点間の距離を$|\lambda|l$ とする．このとき，点線は四辺形の頂点の軌道となる．また図 3(c)に示すように，頂点の移動方向はλの正負に応じて変更される．図 4 では，パラメータλを変更した際に生成される BAPG の形状を比較している．五角形パターンは$\lambda < 0$のとき凹，$\lambda = 0$のとき矩形，$\lambda > 0$のとき凸である．

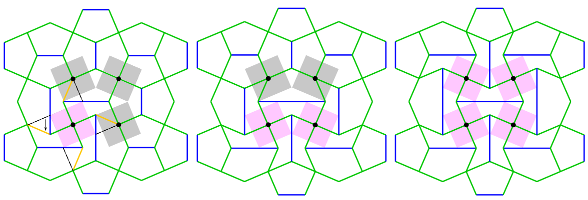


(a)　$\lambda = -0.3$　(b)　$\lambda = 0.0$　(c)　$\lambda = 0.3$

図 4　パラメータλに応じた形状の差異

2.2. フラストレーションに基づく形状設計

回転四辺形ユニットは，隣接する四辺形どうしが鏡映な関係にあることでメカニズムとして成立している．図 5 は回転四辺形ユニットの一部を反転させた状態を示す．このとき，反転した四辺形は隣接する四辺形と頂点を共有せず局所的にメカニズムが成立しない．このような系の相互作用が満たされない状態，すなわちフラストレーションの概念に基づく四辺形の反転操作を形状設計に応用する．



(a)　反転数 1　(b)　反転数 2　(c)　反転数 4

図 5　四辺形の反転操作に基づく形状設計

四辺形の反転操作による形状設計法の流れを図 5(a)に示す．反転させた四辺形（ピンクの領域）の双対である 4 部材は四辺形の中心まわりに回転する．点線は，四辺形の反転操作前の部材を表し，黄の線分は反転操作後の部材を表す．このように，各部材の接続関係を維持したまま BAPG の形状を変更する．また，図 5(b)および(c)において，反転させた四辺形の数をそれぞれ 2，4 としたときの BAPG の幾何形状を示す．この設計法を用いると，異なる形状の五角形格子を 1 つの BAPG に導入できるため，限定された五角形格子のみで構成される骨組構造を多様に設計できる．

3. BAPG の力学特性

3.1. 解析条件

BAPG の力学特性を確認するため有限要素法による静的構造解析を実行する．1 部材を 1 つの梁要素でモデル化し，各頂点を剛に接合する．梁は矩形断面とし，断面幅と断面せいをそれぞれ t_b と t_h で表す．解析には Abaqus Ver. 2022[7]を用い，幾何学的非線形性を考慮する．

3.2. 面内変形に対するポアソン比

BAPG の面内変形に対するポアソン比を調べる．図 6 は境界条件および強制変位を示している．図中の矢印で表す強制変位を，y 方向に沿って位置する，境界付近の 4 価頂点に作用させる．これらの 4 価頂点は x 方向に沿って可動なローラーで支持される．強制変位の方向をローラーの可動方向に沿わせて面内に引っ張りを与える．強制変位の大きさはスパンの 0.1%とする．また面外変形を抑制するため，上記以外の全ての 4 価頂点および四隅の 3 価頂点を xy 平面内で可動なローラー支持とする．

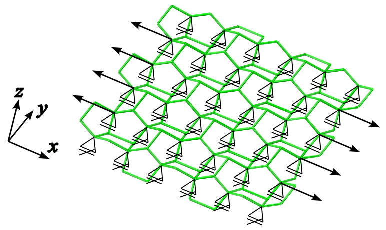


図 6　面内変形に対する境界条件および強制変位

次の 2 種類のパラメトリック・スタディを実行する．

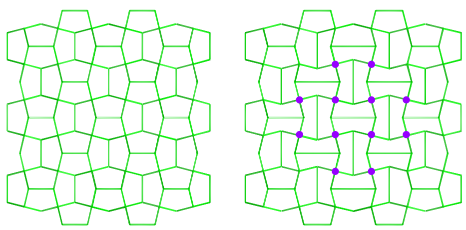
Case 1:　梁の面外曲げ剛性 k_{out} と面内曲げ剛性 k_{in} の比と形状パラメータλの調整

Case 2:　4 価頂点の xy 平面からの高さ h_{D} と形状パラメータλの調整

梁のヤング係数を E とすると，曲げ剛性比は次のように定式化でき，梁の断面幅と断面せいの比で表される．

$$\frac{k_{\mathrm{out}}}{k_{\mathrm{in}}} = \frac{E t_b t_h^{\,3}}{12} \bigg/ \frac{E t_h t_b^{\,3}}{12} = \left(\frac{t_h}{t_b}\right)^2 \tag{1}$$

式(1)より，Case 1 において t_{b} を固定して t_{h} を変更する．$\lambda \in \{-0.4, -0.3, \ldots, 0.4\}$ とし，Case 1, 2 のそれぞれにおいて $0.08 \le k_{\mathrm{out}}/k_{\mathrm{in}} \le 4.0$, $0.0 \le h_{\mathrm{D}} \le 0.5$ の範囲で各パラメータを 1/50 の増分で変更し，解析を実行する．さらに，四辺形の反転操作を十字型に導入した BAPG の結果と比較する．図 7 は，同一パラメータの BAPG に対する四辺形の反転操作の有無による平面形状の比較である．各 Case で固定するパラメータを表 1 に示す．Case 1 と 2 のユニット数はともに 36 とする．また，材料のヤング係数を 25 GPa，ポアソン比を 0.221 とする．



(a)　導入なし　　(b)　導入あり（紫の箇所）

図 7　幾何学的フラストレーションの導入の有無

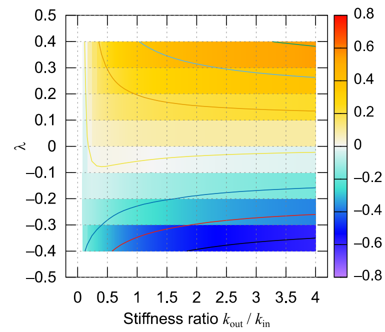
表 1　Case 1 と 2 に対するパラメータ

unit: m	l	h_{D}	$h_{\mathrm{D}}+h_{\mathrm{U}}$	t_{b}	t_{h}
Case 1	$1/\sqrt{2}$	0.0	0.3	0.05	—
Case 2	$1/\sqrt{2}$	—	0.5	0.05	0.05

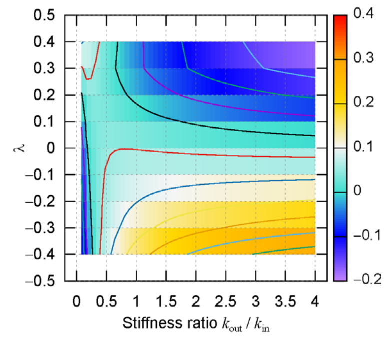
図 8 および 9 はそれぞれ Case 1 および 2 のパラメトリック・スタディで得られた BAPG のポアソン比の分布を示している．

図 8 より，梁の面内外の曲げ剛性比の増大とともにポアソン比の絶対値は増大する．また図 8(a)より，ポアソン比はλに応じて増加し，五角形が凸（$\lambda > 0$）ならポアソン比は正，凹（$\lambda < 0$）なら負となる傾向が確認できる．しかし，$k_{\mathrm{out}}/k_{\mathrm{in}} < 0.2$ では五角形が凸であってもポアソン比が負となる．図 8(a)と(b)を比べると，ポアソン比の符号がλに関して反転しており，BAPG に四辺形の反転操作を実行すれば元の構造と異なる符号のポアソン比を得やすいといえる．

図 9 の分布からは，4 価頂点の高さの増大とともにポアソン比の絶対値が増大することが確認できる．さらに，得られたポアソン比は，面内変形に対するポアソン比の理論値の範囲(−1, 0.5)に収まらない．また，Case 1 と同様，Case 2 で四辺形の反転操作を実行した場合もポアソン比の符号はλに関して反転する．

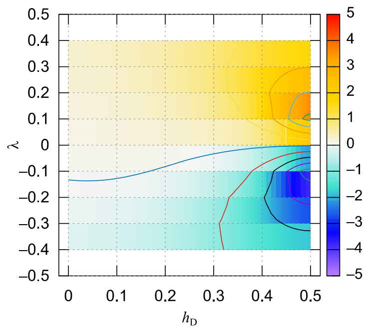


(a)　四辺形の反転操作なし

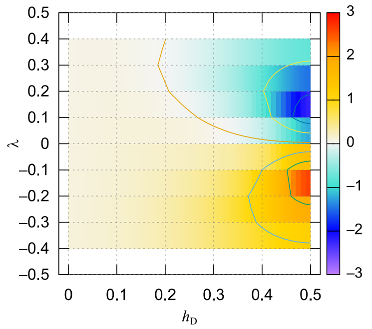


(b)　四辺形の反転操作あり

図 8　$k_{\mathrm{out}}/k_{\mathrm{in}}$ とλに関するポアソン比の分布



(a)　四辺形の反転操作なし



(b)　四辺形の反転操作あり

図 9　h_D と λ に関するポアソン比の分布

4. BAPG を用いたベンディングアクティブ・グリッドシェルの生成

4.1. 解析条件

図 10 は BAPG の面外への大変形解析に対する境界条件および強制変位の設定である．図内のローラー支持にスパンの 10%の大きさの強制変位を与える．解析は 2 段階に分ける．前半では分岐座屈を回避するため，全部材に自重と同じ大きさの人工荷重を上方向に与える．後半で強制変位により曲面を生成する．

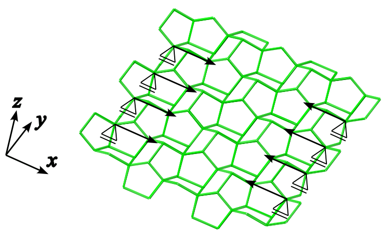
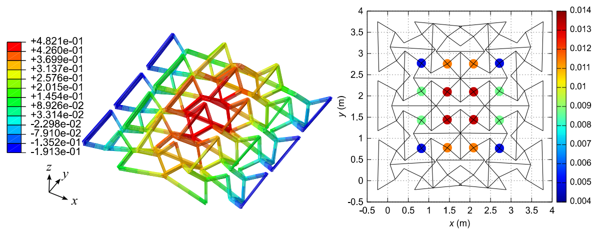


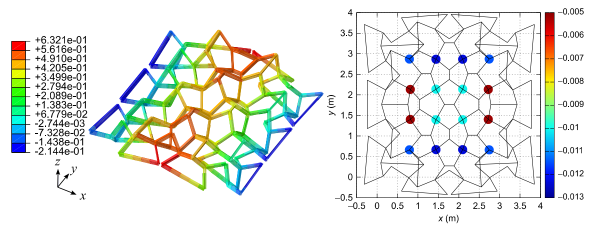
図 10　面外変形に対する境界条件および強制変位

4.2. 曲面例と離散ガウス曲率による曲面形状の定量化

図 11 に，パラメータ $l = 1/\sqrt{2}$ (m), $\lambda = -0.4$, $h_D = 0.0$ (m), $h_D + h_U = 0.3$ (m), $t_b = 0.05$ (m), $t_h = 0.10$ (m)の BAPG に対する大変形形状（左図，コントアは z 方向の変位を表す）と離散ガウス曲率の分布（右図）を示している．離散ガウス曲率は境界を除く 4 価頂点について計算する．図 11(a)は凹な五角形格子をもつ BAPG の大変形形状であり，図 8(a)から面内変形に対してポアソン比が負である．そのため，4 価頂点での離散ガウス曲率は正である．これは図 1(b)の性質に一致する．また，図 11(b)は，フラストレーションを十字型に与えた BAPG を変形して得た曲面である．このとき曲面の 4 価頂点における離散ガウス曲率は負であり，曲面全体は鞍型を形成する．



(a)　四辺形の反転操作なし



(b)　四辺形の反転操作あり

図 11　BAPG の変形形状と離散ガウス曲率の分布

5. 結論

ペンタグラフェンの幾何特性に基づく BAPG の力学特性を検証した．格子が凸五角形の BAPG は，梁の面内外の曲げ剛性比が 0.2 未満のときポアソン比が負である．これはペンタグラフェンの力学特性と同様である．フラストレーションの考えに基づく四辺形の反転操作を形状設計法に応用すると，部材の接続関係を維持したまま BAPG のポアソン比を調整できる．また，4 価頂点の位置によっては理論値の範囲を越えたポアソン比をもつ BAPG を生成できる．さらに，BAPG を面外変形させて得た曲面は，ポアソン比の正負に応じた離散ガウス曲率分布を生じる．

[参考文献]

1) Surajadi JU, Gao L, Du H, Li X, Xiong X, Fang NX, Lu Y. Mechanical metamaterials and their engineering applications, Adv Eng Mater 2019;21:1800864.
2) Sakai Y, Ohsaki M. Optimization method for shape design of auxetic bending-active gridshells using discrete differential geometry, Structures 2021;34:1589–1602.
3) Sakai Y, Ohsaki M. Parametric study of non-periodic and hybrid auxetic bending-active gridshells, J of the Int Assoc for Shell and Spatial Struct 2020;61(4):275–284.
4) Ren X, Das R, Tran P, Ngo TD, Xie YM. Auxetic metamaterials and structures: a review, Smart Mater Struct 2018;27:023001.
5) Zhang S, Zhou J, Wang Q, Chen X, Kawazoe Y, Jena P. Penta-graphene: A new carbon allotrope, PNAS 2015;112(8):2372–2377.
6) Winczewski S, Rybicki J. Negative Poisson's ratio from pentagons: A new auxetic structure combining three different auxetic mechanisms, Comput Mater Sci 2022;201:110914.
7) Dassault Systèmes, "Abaqus 2022 User's manual," 2022.