

部材配置のばらつきを考慮した立方体グリッドへの斜材追加手法

Addition Methods of Braces to Make Cubic Grids Rigid Considering Variations in Placement

○小林 祐貴*
Yuki KOBAYASHI*

* 大阪公立大学大学院 工学研究科 都市系専攻 講師 博士（工学）

* Lecturer, Department of Architecture and Building Engineering, Osaka Metropolitan University, Ph.D.

キーワード：組合せ剛性理論, bar-joint フレームワーク, 斜材, デザイン科学

Keywords: Combinatorial rigidity theory, Bar-joint framework, Braces, Design science.

1. はじめに

組合せ剛性理論は、構造物の接続関係をグラフとして扱うことで、構造物の剛性を組合せ的に特徴付ける理論である。組合せ剛性理論の成果は、ロボティクス、センサーネットワーク、たんぱく質挙動解析、機械工学、建築の構造分野等、様々な分野において応用されている¹⁾。

組合せ剛性理論において扱われる構造物は様々ある中で本稿では、伸び縮みしない剛な棒材(bar)とピン接合(joint)で構成される構造物の bar-joint フレームワークを扱う。bar-joint フレームワークの棒材とピン接合の接続関係について、棒材をグラフの辺、ピン接合をグラフの頂点とし、頂点集合 V と辺集合 E の組として表したグラフ $G = (V, E)$ を **bar-joint グラフ**と呼ぶ。bar-joint グラフを3次元空間に埋め込むことを考える際には、bar-joint フレームワークは $G = (V, E)$ と写像 $\mathbf{p}: V \rightarrow R^3$ の組 $(G, \mathbf{p})$ で表される。

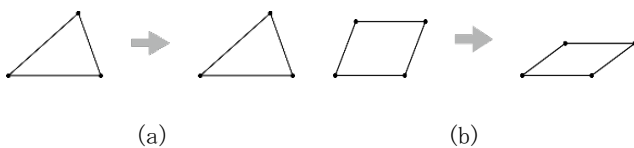


図1 (a)三角形フレームワーク (b)四角形フレームワーク

フレームワーク $(G, \mathbf{p})$ の頂点が辺の長さを変えずに連続的に移動することを**連続的な動き**といい、合同なフレームワークへの移動には**自明な動き**と呼ぶ。自明な動きのみであるフレームワークのことを**剛**であるといい、剛でないフレームワークを**柔軟**であるという。また、どの棒材を1つ取り除いた場合でも、剛ではなくなるフレームワークのことを**極小剛**であるという。ここで剛なフレームワーク、極小剛なフレームワークとして実現可能な bar-joint グラフについても**剛なグラフ**、**極小剛なグラフ**と呼ぶ。例えば図1aのような三角形フレームワークは自明な動きのみが可能であるから剛であり、図1bのような四角形フ

レームワークは元のフレームワークとは合同ではない形に変形するので柔軟である。

2次元における bar-joint フレームワークの組合せ的性質は、古くより Maxwell²⁾の条件や Laman³⁾の定理として知られている。一方で、3次元 bar-joint フレームワークについては、必要条件はあるが十分条件ではなく、2次元の場合のように簡潔な組合せ的特徴付けは知られていない。これまでに Recski⁴⁾は、立方体で構成された3次元 bar-joint フレームワークに対して、斜材を追加することで剛であるときの必要条件を示している。Whiteley⁵⁾は、剛な3次元 bar-joint フレームワークを生成するいくつかの操作を示している。

組合せ剛性理論に基づいた建築構造物の形態生成における研究には、著者らによる panel-hinge フレームワークの剛な構造物の生成手法と建築形態デザインに関する研究⁶⁾、空間充填多面体を用いた3次元の極小剛な bar-joint フレームワークの生成手法と建築形態デザインに関する研究⁷⁾などがある。

本研究では、組合せ剛性理論に基づき、斜材配置が分散した立方体グリッドの構造物を生成する手法を提案する。斜材配置が分散することで、剛であることが直観的には判断することが難しい構造物の作成や、頂点に接合する部材を減らすことができることで施工しやすい構造物になると考える。

2. 準備

2.1. Maxwell の条件

以下は3次元 bar-joint フレームワークにおける Maxwell の条件である。

定理1 (Maxwell²⁾) bar-joint グラフ $G = (V, E)$ を剛な3次元 bar-joint フレームワークとして実現するためには、 $|E| \geq 3|V| - 6$ を満たすことが必要条件である。

定理 1 より 3 次元 bar-joint フレームワークが極小剛である際には, 条件が等式となる $|E| = 3|V| - 6$ を満たすことが条件となる.

2.2. Whiteley の操作

Whiteley により, 剛な bar-joint グラフの生成手法が様々な提案されており, 本稿において検討した操作を以下に記す.

操作 1 (vertex 3-addition) グラフ $G = (V, E)$ が与えられているとし, $v_1, v_2, v_3 \in V$ とする. 新たに頂点 v_0 及び辺 $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3)$ を追加する (図 2a).

操作 2 (edge 3-split) グラフ $G = (V, E)$ が与えられているとし, $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V, (v_1, v_2) \in E$ とする. 辺 (v_1, v_2) を取り除き, 新たに頂点 v_0 及び辺 $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4)$ を追加する (図 2b).

操作 3 (2 辺に対する vertex 3-split) グラフ $G = (V, E)$ において, 頂点 $v_1 \in V$ と結ぶ $(v_1, v_2), (v_1, v_3), \dots, (v_1, v_q), (v_1, v_{q+1}), \dots, (v_1, v_r) \in E$ とする. このとき, 辺 $(v_1, v_2), (v_1, v_3)$ において, 辺 $(v_1, v_4), \dots, (v_1, v_q)$ を取り除き, 新たに頂点 v_0 及び辺 $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \dots, (v_0, v_q)$ を追加する (図 2c).

操作 4 (3 辺に対する vertex 3-split) グラフ $G = (V, E)$ において, 頂点 $v_1 \in V$ と結ぶ $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), \dots, (v_1, v_p), (v_1, v_{q+1}), \dots, (v_1, v_r) \in E$ とする. このとき, 辺 $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4)$ において, 辺 $(v_1, v_5), \dots, (v_1, v_p)$ を取り除き, 新たに頂点 v_0 及び辺 $(v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4), \dots, (v_0, v_q)$ を追加する (図 2d).

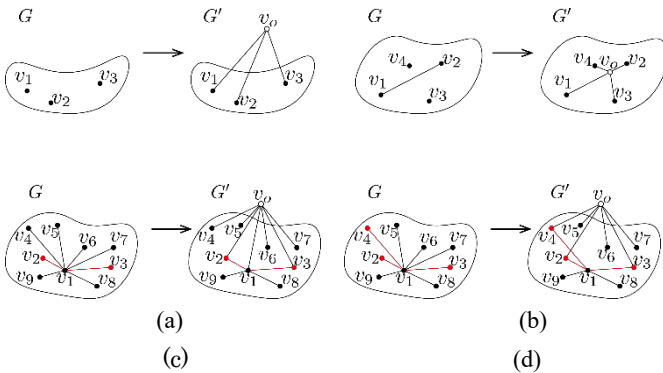


図 2 (a)操作 1 (b)操作 2 (c)操作 3 ($q = 7, r = 9$ の場合) (d)操作 4 ($q = 7, r = 9$ の場合)

さらに Whiteley により, 操作 1, 2, 3, 4 について, 以下の補題が示されている. ここで頂点 v_i の点配置を p_i とする.

補題 1 グラフ $G = (V, E)$ が与えられているとし, $v_1, v_2, v_3 \in V$ とする. 剛なフレームワーク $(G, \mathbf{p})$ に新たな頂点 v_0 及び $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3)$ を追加する操作 1 を行なうことができるフレームワークを $(G', \mathbf{p}')$ とする. このとき, p_0, p_1, p_2, p_3 が同一平面上にないならば, $(G', \mathbf{p}')$ もまた剛である.

補題 2 グラフ $G = (V, E)$ が与えられているとし, $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V, (v_1, v_2) \in E$ とする. 剛なフレームワーク $(G, \mathbf{p})$ に新たに頂点 v_0 及び辺 $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4)$ を追加し, (v_1, v_2) を除く操作 2 を行なうことができるフレームワークを $(G', \mathbf{p}')$ とする. このとき, p_0, p_1, p_2, p_3 が同一平面上にないならば, ほとんど全ての $(G', \mathbf{p}')$ が剛である.

補題 3 極小剛なグラフ G に 2 または 3 辺に対する vertex 3-split を行ったグラフ G' について, G' を一般的な配置 $\mathbf{p}'$ に埋め込んだフレームワーク $(G', \mathbf{p}')$ は剛である.

補題 2 及び 3 について, 立方体グリッドにおいて操作 2, 3 及び 4 を行なった際に, 剛にはならない場合がある. このため, 操作 1 以外を行う際には, 次節にて述べる剛性行列のランク計算を行うことによって剛であることを確認している.

2.3 剛性行列

3次元において, 同じグラフ $G = (V, E)$ についての 2 つのフレームワーク $(G, \mathbf{p})$ 及び $(G, \mathbf{q})$ に対して, 辺 $e = (u, v) \in E$ とする. 対応する辺の長さが等しいとき, 次の式が成り立つ.

$$|\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(v)|^2 = |\mathbf{q}(u) - \mathbf{q}(v)|^2 \quad \text{for all } (u, v) \in E \quad (1)$$

式(1)を $\mathbf{p}$ について微分すると, 次式となる.

$$(\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(v)) \cdot (\dot{\mathbf{p}}(u) - \dot{\mathbf{p}}(v)) = 0 \quad \text{for all } (u, v) \in E \quad (2)$$

式(2)の解 $\dot{\mathbf{p}}$ を $(G, \mathbf{p})$ の無限小動きという. 可能な無限小動きがすべて自明な動きである場合, $(G, \mathbf{p})$ は無限小剛であるという. 式(2)を変数 $\dot{\mathbf{p}}$ に対し行列表現して得られる $|E| \times 3|V|$ 個の連立方程式の左辺の行列が剛性行列であり, $R(G, \mathbf{p})$ とする. $(G, \mathbf{p})$ が無限小剛であるための必要十分条件は次式で与えられる¹⁾.

$$\text{rank } R(G, \mathbf{p}) = 3|V| - 6 \quad (3)$$

無限小剛性は剛性行列のランク計算を行うことで判定可能であり、無限小剛性は剛性の十分条件であることが知られている⁸⁾。

2.4 立方体グリッドについて

本稿において、 x 軸方向に k 個、 y 軸方向に l 個、 z 軸方向に m 個の立方体で構成された3次元 bar-joint フレームワークを $k \times l \times m$ 立方体グリッドと呼ぶ。また、 $k \times l \times m$ 立方体グリッドに斜材を追加する際、立方体の対角には斜材を追加せず、立方体の面内に追加する。

2.5 斜材配置のばらつきについて

本研究では、斜材配置を分散させることで、直感的には剛と判断することが難しい構造物を生成することを目的としているため、斜材付き立方体グリッドの頂点に接続する斜材の辺数に着目する。したがってグリッドを構成する辺を除き、頂点に接続する斜材のみの頂点次数を**斜材次数**と呼ぶ。極小剛な $k \times l \times m$ 斜材付き立方体グリッドの斜材次数の分散によって、斜材配置のばらつきを評価する。

極小剛な $k \times l \times m$ 立方体グリッドについて、 x_i を頂点斜材次数、 $\bar{x}$ を斜材次数の平均値とし、分散 s^2 を以下の式で求める。

$$s^2 = \frac{1}{|V|} \sum_{i=1}^{|V|} (x_i - \bar{x})^2 \quad (4)$$

3. 複数の立方体を合わせて剛にしていくことの検討

既往研究⁷⁾においては、一つの立方体を剛にしていくことを繰り返したことで斜材配置に偏りが生じたことから、一層分の立方体を合わせて追加していくことで、極小剛な $2 \times 2 \times 2$ 立方体グリッドを生成することを検討し、操作1及び2を繰り返すことで極小剛な $2 \times 1 \times 2$ 立方体グリッドを作成することができた(図3)。

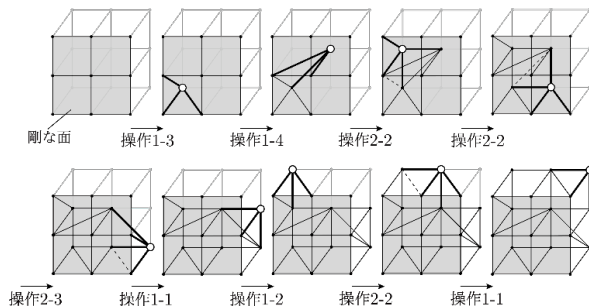


図3 一層分の立方体を合わせて追加していく過程

ここで得られた極小剛な $2 \times 2 \times 2$ 立方体グリッド(図4a)の斜材配置の分散は1.285であった。既往研究における操作1のみで生成した場合(図4b)の分散は2.321であったので、斜材配置のばらつきを大きくすることができた。

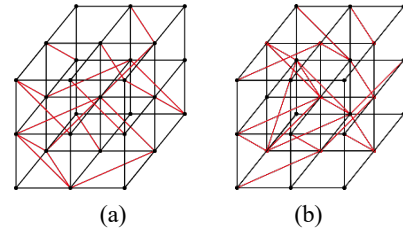


図4(a)生成した $2 \times 2 \times 2$ 立方体グリッド, (b)操作1のみで生成した極小剛な $2 \times 2 \times 2$ 立方体グリッド(赤線は斜材)

4. 斜材次数に基づいた極小剛な領域の拡大

前章では、極小剛な $2 \times 1 \times 2$ 立方体グリッドを起点にして構造物を生成したため、起点となる極小剛な $2 \times 1 \times 2$ 立方体グリッドに斜材が集中したままであった。そこで、ユニットをつくらず、斜材次数を減らしながら構造物を生成することを検討した。例えば図5のように、両端の斜材次数が3となっている斜材を取り除き、頂点の頂点斜材次数を2に減らし、斜材配置を分散させる。

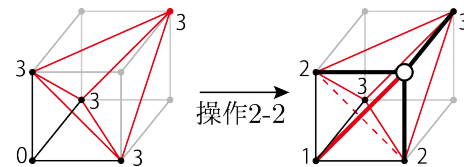


図5 斜材次数を減らす操作

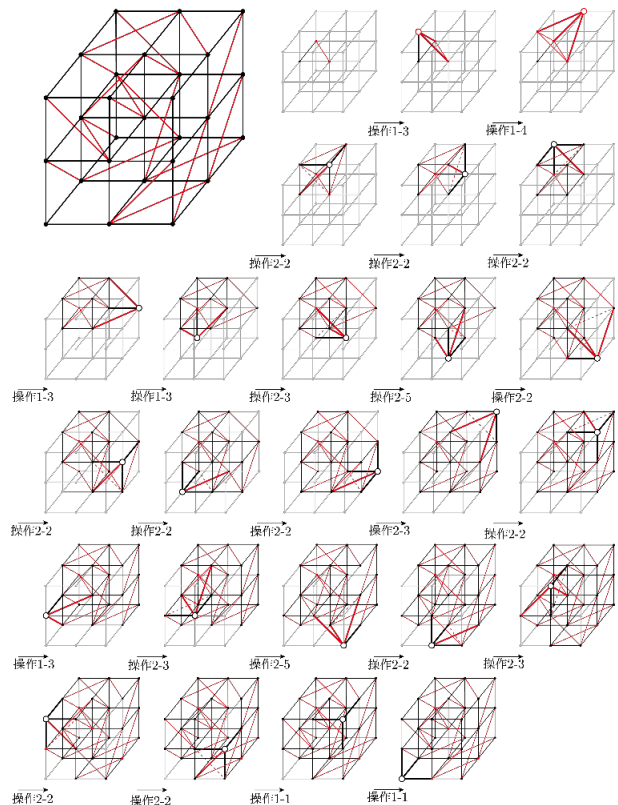


図6 極小剛な $2 \times 2 \times 2$ 立方体グリッドと生成過程

斜材次数を減らしながら，極小剛な $2 \times 2 \times 2$ 立方体グリッドを生成した (図 6)．このときの分散は 0.617 であり，より斜材配置のばらつきをより大きくすることができた．

同様な考え方により，操作 3 及び 4 を用いることによって斜材次数が高い頂点について斜材を減らすことを検討したが，良い生成手順はできなかった．

5. まとめ

本稿では，極小剛な立方体グリッドを作成する操作 1 から操作 4 の適用を検討し，斜材が分散した立方体グリッドの構造物を生成した．斜材が分散したユニットを生成し接続することで，構造物全体に斜材を分散させることができた．斜材次数に着目することで，さらに斜材が分散した構造物を生成した．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 23K17158 及び 23H03350 の助成を受けたものである．また，本稿は研究室修了生の吉山大雅君が，修士論文にて取り組んだ研究内容について加筆，修正して纏めたものであり，ここに謝意を表す．

[参考文献]

- 1) 加藤直樹, “組合せ剛性理論とその応用”, システム/制御/情報, 59(7): 262–267, 2015.
- 2) J. C. Maxwell, “On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames”, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 27(182): 294–299, 1864.
- 3) G. Laman, “On graphs and rigidity of plane skeletal structures”, Journal of Engineering mathematics, 4(4): 331–340, 1970.
- 4) A. Recski, “Bracing cubic grids—a necessary condition”, Discrete Mathematics, 73(1-2): 199–206, 1988.
- 5) W. Whiteley, “Some matroids from discrete applied geometry”, Contemporary Mathematics, 197: 171–312, 1996.
- 6) Y. Kobayashi, N. Katoh, T. Okano, and A. Takizawa, “An inductive construction of rigid panel-hinge graphs and their applications to form design”, International Journal of Architectural Computing, 13(1): 45–63, 2015.
- 7) 小林祐貴, 加藤直樹, “極小剛な空間充填立体 bar-joint フレームワークの生成手法及び建築形態デザインへの応用”, 日本建築学会環境系論文集, 83(745): 323–331, 2018.
- 8) L. Asimow and B. Roth, “The rigidity of graphs”, Transactions of the American Mathematical Society, 245: 279–289, 1978.