

フラクタル幾何学的形状をした建築骨組の生成

コッホ曲線に基づく立体形状

A Generation of Frame Structure Based on Fractal Geometric Form

Spatial frame based on Koch curve

○佐藤 玲^{*1}, 前 稔文^{*2}, Iasef Md RIAN^{*3}
Rei SATOU^{*1}, Toshifumi MAE^{*2} and Iasef Md RIAN^{*3}

^{*1} 大分高専専攻科機械・環境システム工学専攻

Mechanical-Environmental System Engineering Major, National Institute of Technology, Oita College, Advanced Course

^{*2} 大分高専都市・環境工学科 教授 博士(工学)

Professor, Department of Civil and Environmental Engineering, National Institute of Technology, Oita College, Dr. Eng.

^{*3} Associate Professor, Department of Architecture and Design, Xi'an Jiaotong-Liverpool University, Suzhou, China, Ph.D.

キーワード：フラクタル；コッホ曲線；建築骨組；空間構造；骨組解析

Keywords: Fractal; Koch curve; framework; spatial structure; frame analysis.

1. 研究背景

自然界の樹木、雲、地形などは非常に複雑な形状のフラクタル幾何学的図形であり、それらの形状は自然の環境下で自重や外力に耐え続けるために合理性を持っている。したがって、フラクタル幾何学図形は自然界の物事の合理性に寄与しているといえる。

加えて Kisimoto et al.¹⁾により、フラクタル幾何学図形を構造に適用することによって構造全体の剛性をほとんど失うことなく部材数を減らすことができ、総重量を軽くすることができるという事が明らかになっている。この事実からフラクタル幾何学図形を構造に適用することにより既存の構造物より合理的な構造となるのではないかと考えられる。

また、一連の研究²⁾では凹凸が大きく構造物への適用が困難だと考えられていた複雑なコッホ曲線にパラメータ等を用いることにより、新たな構造形態への適用を可能としている。このようにフラクタル幾何学図形のモデル化を工夫することで、自然界の合理性を持ち合わせた構造物となるのではないかと考える。

そして、一連の研究ではコッホ曲線を応用した空間フレームのモデルが作成されており、骨組解析まで行われている。このモデルを様々な形状で解析できるよう、高さ h をパラメータとした空間フレームの成立を本研究の目的とする。

2. 高さ h をパラメータとする空間フレーム

2.1. コッホ曲線

コッホ曲線は図 1 のように凹凸が特徴的な図形であり、線分を 3 等分にし、その 2 点より正三角形を作り、このとき生成された線分 1 つ 1 つに同じ操作を行い、この操作を



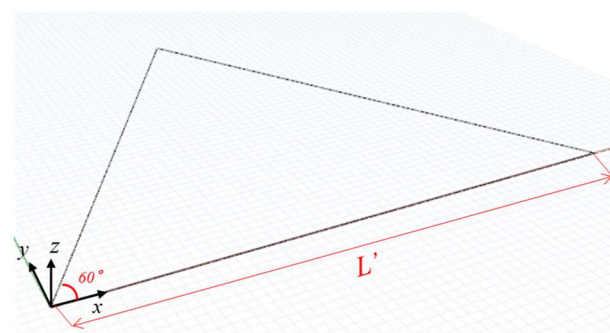
図 1 コッホ曲線

無限に繰り返すことで描かれる。無限に操作を繰り返すため、曲線は徐々に長くなっていく。そのため、定義上では、曲線の長さは無限である。また、コッホ曲線は 1 回の操作で作成される辺の縮小率が $1/3$ であり、生成された図の線分は 4 本となるため、フラクタル次元は、1.262 となる。

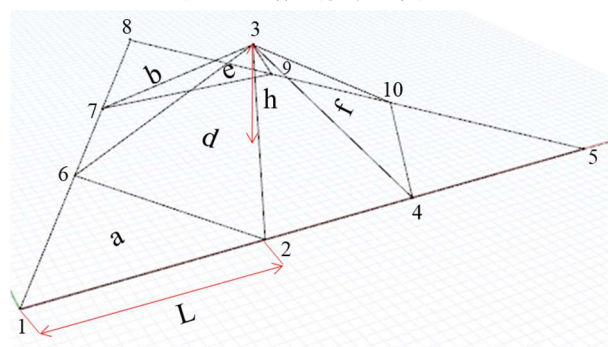
2.2. 空間フレームの生成過程

ここからは 2 次元のコッホ曲線を応用し、3 次元の空間フレームへ適用する方法について述べる。本研究では 3DCAD ソフトの Rhinoceros を用いて作図を行った。まず初期形状として、辺の長さ L の正三角形を基となる図形とし、図 2a) に示す xy 平面上に作図する。その xy 平面上の正三角形の図心から z 軸方向に高さ h の節点 (図 2b) の節点 3) をプロットする。このとき、 xy 平面上の正三角形の各辺を 3 分割するように各頂点から長さ L の節点 (図 2b) の節点 2, 4, 6, 7, 9, 10) をプロットし、高さ h の節点と線で結びつけることにより、初期形状の xy 平面上の正三角形を縮小した正三角形 (a~f) を 6 個組み合わせた立体図形 (図 2b)) となる。また辺 1, 5 を基に λ 倍に縮小した写像である辺 1, 2, 辺 2, 3, 辺 3, 4, 辺 4, 5 が 4 辺組み合わさったコッホ曲線が見られる。

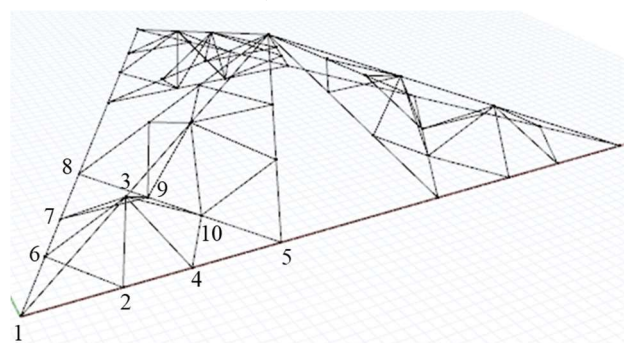
さらに、図 2c) に示すように正三角形 (a~f) に 1 段階目と同じ操作を繰り返し、高さ h の節点と初期形状である xy 平面上の正三角形の各頂点を結ぶことにより 1 段階目の立



a) 0 段階 (初期形状)



b) 1 段階



c) 2 段階

図 2 生成過程

体図形が 6 個組み合わせたコッホ曲線を応用した 3 次元の空間フレームが生成される。

2.3. IFS コード

ここでは、前項で生成したフレームについて写像の 1 辺の長さ L を固定し、高さ h をパラメータとしても空間フレームとして成立するよう IFS コードを用いたアフィン変換を活用し、各節点を数理化した。

また、図 3 と図 4 に示す関係を用いて各変数の関係を式(1)～(6)に表す。ここで、原点を図形の節点 1、初期形状の正三角形の一边の長さを L' 、写像の正三角形の一边の長さを L 、図 3 に示す角度を θ 、 θ' 、 θ'' とする。なお、 θ は図 2c) の写像 d と xy 平面のなす角度 (図 4a))、 θ' は図 2b) の辺 2、3 と xy 平面のなす角度 (図 4b))、 θ'' は図 2b) の辺 2、6 と初期形状の正三角形の図心と図 2b) の節点 2 のなす角度 (図 4c))、図 4d) に示す写像の正三角形の間の距離を x とする。

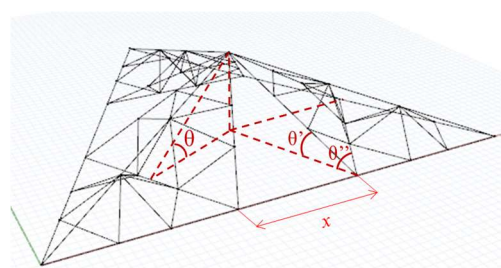
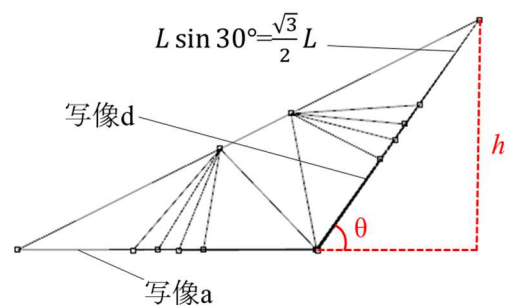
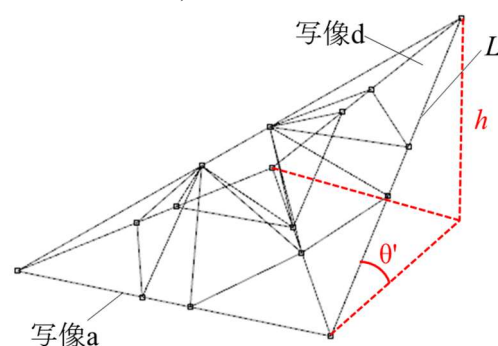


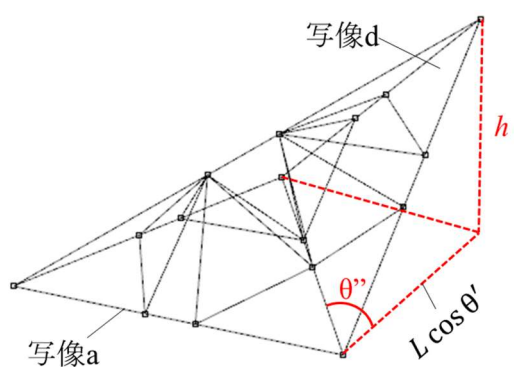
図 3 角度と写像の正三角形の間の距離 x について



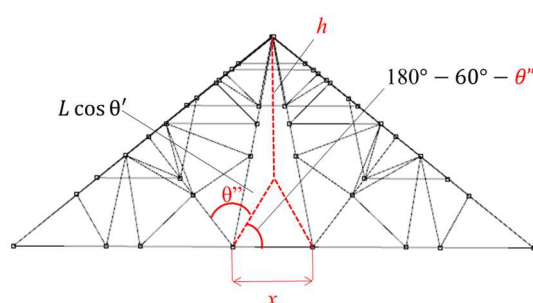
a) θ について



b) θ' について



c) θ'' について



d) について

図 4 角度についての詳細

$$\theta = \sin^{-1} \frac{2h}{\sqrt{3}L} \quad (1)$$

$$\theta' = \sin^{-1} \frac{h}{L} \quad (2)$$

$$\theta'' = \cos^{-1} \frac{h}{L \cos \theta'} \quad (3)$$

$$x = 2(L \cos \theta') \cos(180 - 60 - \theta'') \quad (4)$$

$$L' = 2L + x \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{L}{L'} \quad (6)$$

ここで、IFS コードとは反復関数系 (Iterated function system, IFS) で用いられるコードである。フラクタルは自身のいくつかの写像の和集合から成り、各写像は関数によって変形される。そのためフラクタルを各写像に変形する際に用いられる関数を IFS コードという。

また、アフィン変換とは線形変換 (回転, 拡大縮小) と平行移動の組み合わせである。今回の図形は 3 次元であるため、式(7)のように 3 次元のアフィン変換を行った。

$$W \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{Bmatrix} \quad (7)$$

そしてアフィン変換に用いる IFS コードを求めるためには図 2a)の初期形状が図 2b)の写像 a~f にどのように線形変換されたかを求めることが必要である。また図 2b)から図 2c)も同様の操作によって生成される図形のため、得られた IFS コードを用いることにより表すことができる。図 2a)から図 2b)の写像 a への線形変換は図 2a)を原点中心に λ 倍縮小することで表すことができる。図 3a)から図 2b)の写像 b, c への線形変換は、図 2a)を原点中心に λ 倍縮小し、 xy 方向に移動させることで表すことができる。図 2a)から図 2b)の写像 d, e, f への線形変換は、図 2a)を原点中心に λ 倍縮小し、 x 軸周りに θ 回転、続いて z 軸周りに -60° , 180° , 60° 回転して xy 方向に移動させることで表すことができる。それらをまとめたものが表 1 の IFS コー

ドである。

2.4. 境界条件

このようにして生成された空間フレームには高さ h による境界条件が存在する。高さの最小値は h が 0 の時で、その時の空間フレームを図 5 に示す。また高さ h は図 2b)の節点 2, 4 が重なるとき (図 6) に最大値となる。

よって図 7 に示すように正四面体となるため、三平方の定理より高さ h は式(8)で表される。

$$h = \frac{\sqrt{6}}{3}L \quad (8)$$

以上から、空間フレームの境界条件は式(9)のように表される。

$$0 \leq h \leq \frac{L}{2\sqrt{3}} \tan \theta \quad (9)$$

2.5. フラクタル次元

生成された空間フレームのフラクタル次元は初期形状の正三角形の一辺の長さを L' と写像の正三角形の一辺の長さを L の関係から式(1)~(6)を参考に以下のように表すことができる。

$$6(\lambda)^D = 1$$

$$(\lambda)^D = \frac{1}{6}$$

$$D \log(\lambda) = \log\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$D = \frac{(\log 6)}{(\log \frac{1}{\lambda})} \quad (10)$$

また、写像の正三角形の一辺の長さ L を 20m とし、高さ h を境界条件の範囲で変化させた時のフラクタル次元のグラフを図 8 に示す。このグラフからフラクタル次元は式(11)の範囲となることが分かった。

$$1.63 \leq D \leq 2.58 \quad (11)$$

表 1 IFS コード

w	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{31}	α_{32}	α_{33}	λ	a	b	c
a	1	0	0	0	1	0	0	0	1	$\frac{L}{L'}$	0	0	0
b	1	0	0	0	1	0	0	0	1	$\frac{L}{L'}$	$(1-\lambda)\frac{L}{2}$	$(1-\lambda)\frac{\sqrt{3}L}{2}$	0
c	1	0	0	0	1	0	0	0	1	$\frac{L}{L'}$	$(1-\lambda)L$	0	0
d	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$	$-\frac{1}{2} \sin \theta$	0	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\frac{L}{L'}$	$\frac{\lambda L}{2}$	$\frac{\sqrt{3} \lambda L}{2}$	0
e	-1	0	0	0	0	$\sin \theta$	0	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\frac{L}{L'}$	$(1+\lambda)\frac{L}{2}$	$(1-\lambda)\frac{\sqrt{3}L}{2}$	0
f	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$	$-\frac{1}{2} \sin \theta$	0	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\frac{L}{L'}$	$(1-\lambda)L$	0	0

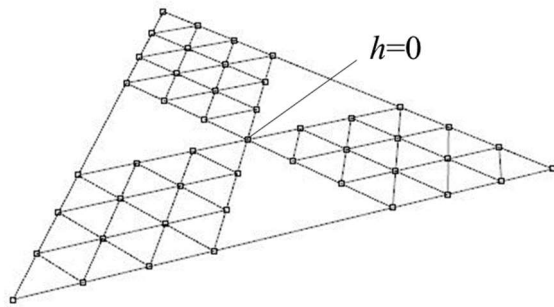


図5 h が最小のとき

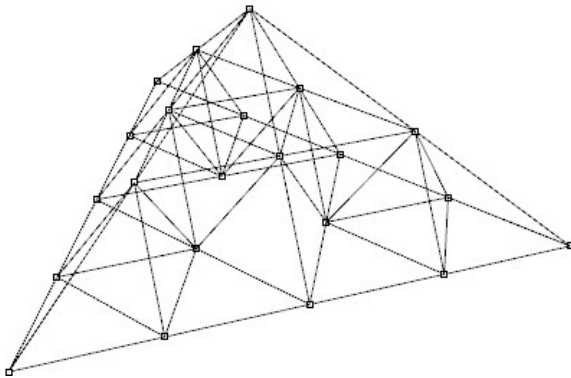


図6 h が最大のとき

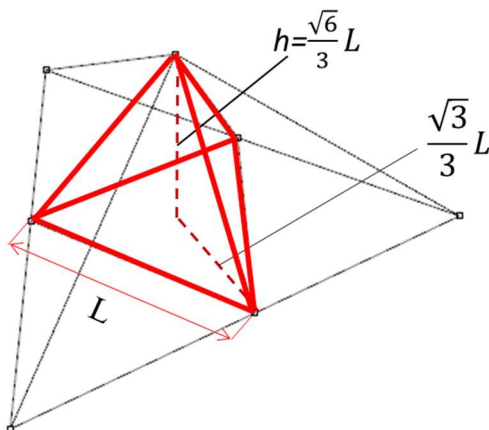


図7 h の最大値

2.6. 空間フレームの生成例

このようにして得られた IFS コードと境界条件を用いることにより、高さ h の異なる図形の生成が可能となった。その実施例として $h=50\text{m}$, $L=100$ の空間フレームを生成する。式(1)~(6)に値を代入し、表1の IFS コードと式(7)を用いることにより、図9のような空間フレームを生成することができた。そして生成された空間フレームのフラクタル次元は式(9)より

$$D = \frac{(\log 6)}{(\log \frac{1}{\lambda})} \approx 1.788$$

となる。

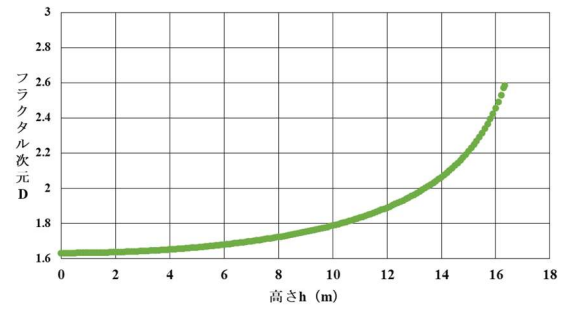


図8 フラクタル次元

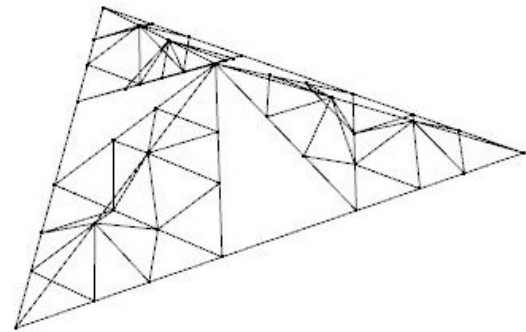


図9 $h = 50\text{m}$, $L = 100\text{m}$ のとき

3. まとめ

一連の研究のコッホ曲線を応用した空間フレームのモデルを2次元のコッホ曲線を基に3次元空間上で再現し、空間フレームとして成立させた。その際、高さ h と写像の正三角形の一辺の長さ L を変数とし、IFS コードによるアフィン変換を行うことにより様々な形状の空間フレームを生成できるようになった。

4. 今後の展望

今後の研究では、生成されたコッホ曲線に基づくフラクタル幾何学的形状をした建築骨組を3次元構造解析ソフトの Multiframe を用いて応力解析を行っていきたい。その際、変数の高さ h と写像の正三角形の一辺の長さ L だけを変化させるのではなく、初期形状を正三角形から二等辺三角形等に変化させることによる応力の変化も調べていきたい。また、生成された建築骨組が力学的あるいは造形的にどのような構造物に適しているかも併せて検討していきたい。

【参考文献】

- 1) Naoko Kishimoto and M. C. NATORI, Basic Consideration of Structures with Fractal Properties and Their Mechanical Characteristics, The Institute of Space and Astronautical Science, March 2000.
- 2) T. MAE and I. M. RIAN, A generation of frame structure based on Koch curve and an application to spatial frame, Proceedings of the IASS Annual Symposium 2019, October 2019.