

# ねじれの抑制された曲面の形態創生とデジタルファブリケーションによる検討 Computational Morphogenesis of Twisting-Controlled Surfaces and Digital Fabrication Evaluation

○清水 万紀子\*1, 藤田 慎之輔\*2  
Makiko SHIMIZU\*1, Shinnosuke FUJITA\*2

\*1 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 大学院生

Graduate Student, Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu

\*2 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 准教授

Assoc. Prof., Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu, Dr. Eng.

**キーワード**：離散曲面; PQ メッシュ; アイソパラメトリック要素; 形状制御汎関数; 逐次二次計画法

**Keywords** : Discrete surface; PQ mesh; Isoparametric element; Shape control functional; Sequential quadratic programming

## 1. 概要

スプライン関数などによるパラメトリック曲面は、一般に節点数よりも少ない数の制御点座標値で曲面の滑らかさを保持したまま形状制御が可能であるため、形状最適化をはじめとした formfinging 技術と相性が良く、主に RC の自由曲面シェル構造物などの形状表現に利用されてきた他<sup>1)</sup>、一般的な CAD/CG ソフトウェアに標準搭載されている。ただし、ラチスシェルなどを想定した場合には、実際の構造物としてはグリッドが存在し、グリッドの1つ1つに仕上げが施工される離散曲面となる。四角形グリッドを想定した場合、1つ1つの面がねじれ面になってしまうと施工性が大きく低下するため、施工性を考えれば連続曲面としてパラメトリックに扱うことが必ずしも適切ではない場合がある。既往の研究では、PQ メッシュ<sup>2)</sup>と呼ばれる完全平面の四辺形メッシュによる曲面構成が研究されているが、曲面形状が限定され、無理に PQ メッシュだけで曲面を構成しようとすると曲面全体の滑らかさが失われてしまう。本研究では、四辺形要素のねじれ度を定量的に評価し、デジタルファブリケーションにより物理的にもねじれ度を確認した上で、曲面の形状表現の自由度と滑らかさ、ならびに各要素の平坦性を両立した曲面の創生を行う。

## 2. 四角形要素の面勾配

各四角形要素の面勾配を定義するために四角形要素内の任意の座標  $x, y, z$  を頂点の座標  $x_i, y_i, z_i (i = 1, \dots, 4)$  を用いて次式で表す。

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^4 N_i z_i \quad (1)$$

ここで、 $N_i (i = 1, \dots, 4)$  は形状関数で2つのパラメータ  $\xi, \eta (-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1)$  を用いて次のように定義する。

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (2)$$

$x, y$  のパラメータに関する偏微分は次式で記述できる。

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \quad (3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i$$

また、

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta), \quad \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi) \quad (4)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1-\eta), \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi) \quad (5)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta), \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi) \quad (6)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta), \quad \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1-\xi) \quad (7)$$

である。さらに、形状関数の  $x, y$  に関する偏微分についてヤコビアンを以下のようにすると

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (9)$$

の関係が成り立つことから

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (10)$$

により陽に計算できる。このとき、 $z$  座標に関する面勾配  $\nabla z(\xi, \eta)$  は次式で表される。

$$\nabla z(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} z_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} z_i \end{bmatrix} \quad (11)$$

以降、定式化の簡略化のために、

$$\frac{\partial z}{\partial x}(\xi, \eta) = z_x(\xi, \eta), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(\xi, \eta) = z_y(\xi, \eta) \quad (12)$$

とおく。また、 $e$  番目の要素に関する量であることを左下添え字で表すものとする。例えば、要素  $e$  の  $\xi = 1.0, \eta = 0.0$  の点における  $x$  方向勾配は  $e z_x(1.0, 0.0)$  となる。

### 3. 曲面全体の滑らかさを制御する汎関数

離散曲面が図1に示すような  $N \times M$  の格子グリッドで構成される場合、隣接する要素間で勾配差が小さい程曲面は滑らかであることから(図2)、次式に示すような汎関数  $f_1$  によって曲面全体の滑らかさを制御することが可能となる。

|     |      |     |     |     |          |
|-----|------|-----|-----|-----|----------|
| N-1 | 2N-1 | ... | ... | ... | MN-1     |
| N-2 | 2N-2 | ... | ... | ... | MN-2     |
| ⋮   | ⋮    | ... | ... | ... | ⋮        |
| ⋮   | ⋮    | ... | ... | ... | ⋮        |
| 1   | N+1  | ... | ... | ... | (M-1)N+1 |
| 0   | N    | ... | ... | ... | (M-1)N   |

図1: 格子グリッドの要素番号

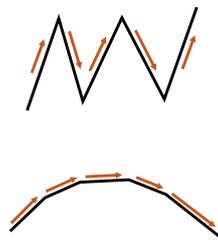


図2: 面勾配の変化量による滑らかさの違い

$$f_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-1} \{N \cdot i + j z_y(0, 0) - N \cdot i + j + 1 z_y(0, 0)\}^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{N-1} \{N \cdot i + j z_x(0, 0) - (N+1) \cdot i + j z_x(0, 0)\}^2 \quad (13)$$

### 4. 要素のねじれを制御する汎関数とデジタルファブリケーションによる検討

施工性を考慮すると曲面を構成する四角形要素は、ねじれが少なく平面に近いことが望ましい。図3に示すように、各要素の対角関係にある頂点同士の勾配差を抑制すると、その要素のねじれ度を評価できることを利用し、各要素ごとに次のような汎関数  $e f_2$  を定義する。

$$e f_2 = \sum_{k=1}^4 e f_{2k} \quad (e = 1, \dots, m) \quad (14)$$

ここで、 $m$  は要素数 ( $= N \times M$ )、

$$\begin{aligned} e f_{21} &= \{e z_x(-1, -1) - e z_x(1, 1)\}^2 & (e = 1, \dots, m) \\ e f_{22} &= \{e z_x(1, -1) - e z_x(-1, 1)\}^2 & (e = 1, \dots, m) \\ e f_{23} &= \{e z_y(-1, -1) - e z_y(1, 1)\}^2 & (e = 1, \dots, m) \\ e f_{24} &= \{e z_y(1, -1) - e z_y(-1, 1)\}^2 & (e = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (15)$$

はアイソパラメトリック要素である各要素の対角関係にある頂点同士の勾配差の  $x, y$  成分である。

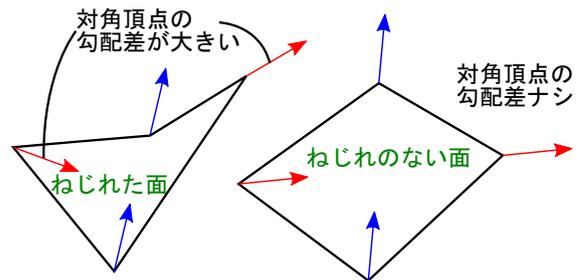


図3: 対頂点のねじれ度と勾配差の関係

$e f_2$  は各要素のねじれが大きくなるに従って値は大きくなる。本研究では、次節以降に示す数値解析例において、 $10\text{m} \times 10\text{m}$  の正方形平面を有する  $6 \times 6$  の格子グリッド曲面を扱うため、その1要素(1辺の長さ

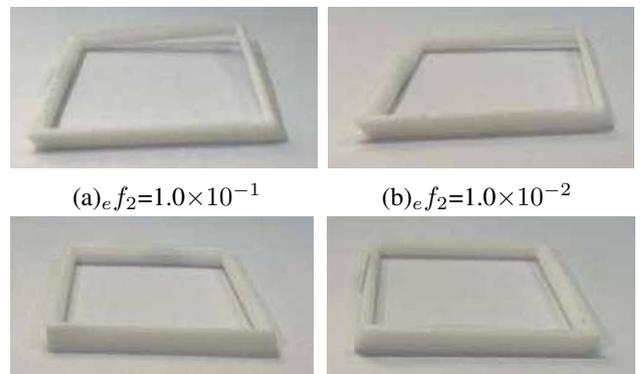


図4: 3D プリンターで出力した1要素模型

≒ 1.67m) を取り出し、 $e f_2$  の値と実際のねじれの程度について、 $e f_2$  が  $1.0 \times 10^{-4} \sim 1.0 \times 10^{-1}$  の範囲において 3D プリント出力した結果、 $e f_2 = 1.0 \times 10^{-1}$  の要素は目視で確認できるレベルの大きなねじれを生じているのに対して、 $e f_2 = 1.0 \times 10^{-2}$  の要素はそれが殆ど消失し、 $e f_2 \leq 1.0 \times 10^{-3}$  の範囲であれば、物理的にほとんど平面と変わらない形状であることが確認できた (図 4)。

## 5. 汎関数 $f_1$ と $e f_2$ を用いた曲面の形態創生

本研究ではまず、10m スパンの正方形平面を有する、 $6 \times 6$  の格子グリッドの鉛直方向座標ベクトル  $z$  を設計変数とし、前節までに定義した  $f_1$  と  $e f_2$  をそれぞれ目的関数と制約条件に有する次のような最適化問題を考える。

$$\underset{z}{\text{minimize}} \quad f_1 \quad (16a)$$

$$\text{subject to} \quad e f_2 \leq \varepsilon_1 \quad (16b)$$

$$|z_i - \bar{z}_i| \leq \varepsilon_2 \quad (i \in A) \quad (16c)$$

ここで、 $\varepsilon_1$  は要素のねじれを抑制するための  $e f_2$  の上限値であり、この値が 0 の時に要素は完全な平面となるが、0 に制約すると実行可能解が限定されてしまう。前節における模型検証において、 $e f_2 = 1.0 \times 10^{-3}$  程度であればほぼ平面とみなせることが確認されたことから、本研究では  $\varepsilon_1 = 1.0 \times 10^{-3}$  を基準として最適化計算を行い、物理的に問題とならない微小なねじれについては許容するものとする。制約条件が式 (16b) のみの場合、

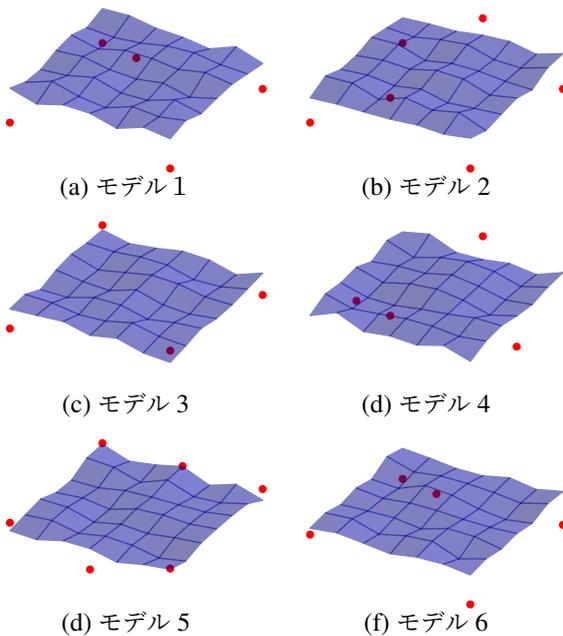


図 5: モデルの形状と指定点

最適解は平面になってしまうため、特定の集合  $A$  に所属する節点  $i$  の  $z$  座標を指定値  $\bar{z}$  に近づける制約 (16c) を付加することで、要素単体ではねじれを抑制しつつも、曲面全体としては曲率を有する曲面の生成を試みる。本研究では集合  $A$  に選ぶ点とその指定  $z$  座標を様々に変え、図 5 に示す 6 種類のケースについて最適化を行う。図中における青い面は初期形状 ( $z$  は 0~1 の範囲でランダムに与えている)、赤点は集合  $A$  に所属する節点の  $z$  座標を指定値  $\bar{z}$  とした点を表す。 $\varepsilon_2$  を 0 とすれば、その曲面は指定点を完全に通ることとなるが、数値解析例ではある程度の誤差は許容し、 $\varepsilon_2 = 0.1$  に設定した。なお、指定点の数、位置によっては、 $e f_2 \leq 1.0 \times 10^{-3}$  を満足する実行可能解が存在しない場合がある。そのようなケースでは、 $\varepsilon_1$  の値を少しずつ大きくしながら実行可能解が得られるまで最適化計算を繰り返すこととした。

指定点の配置を様々に変えて繰り返し最適化を行った結果を図 6 に示す。モデル 3,5,6 については、 $\varepsilon_1 = 1.0 \times 10^{-3}$  において実行可能解が存在しなかったため、 $\varepsilon_1$  の値を適宜緩和して再解析を行った結果を示している。図中の数値およびカラーマップは  $e f_2$  の数値分布を表している。解析結果を見ると、指定点が球の一部や円筒面を形成可能な場所に位置している場合は、比較的ねじれの少ない格子グリッドが形成可能であるのに対して、モデル 5 のように、指定点が曲率分布が非対称かつ一様でない曲面しか形成できない場所に位置しているものについては、ある程度のねじれを許容しないと格子グリッドでは曲面を構成できない結果となった。

なお、問題 (16) から制約 (16c) を除くと曲面は完全に平面になってしまうが、代わりに曲面の面積  $S$  を平面の面積よりも大きい指定値  $\bar{S}$  に設定する次の最適化問題

$$\underset{z}{\text{minimize}} \quad f_1 \quad (17a)$$

$$\text{subject to} \quad e f_2 \leq \varepsilon_1 \quad (17b)$$

$$S \geq \bar{S} \quad (17c)$$

を解けば、完全平面の形成を回避できる。このことを利用し、 $\bar{S}$  の値を変化させながら最適化問題 (17) を繰り返し解いて作成した  $f_1 - S$  パレートフロントを図 7 に、代表的な解形状を図 8 にそれぞれ示す。なお、 $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$  としているので、全ての最適解において四辺形要素の平面性は保たれている。この最適化結果を見ると、指定表面積が小さいうちは HP 曲面のような形状が形成され、 $\bar{S}$  が大きくなるにつれて 1 方向にしか曲率を持たない曲面へと変化していることが確認できる。これらはモデル 2~4 にも見られた特徴であり、HP

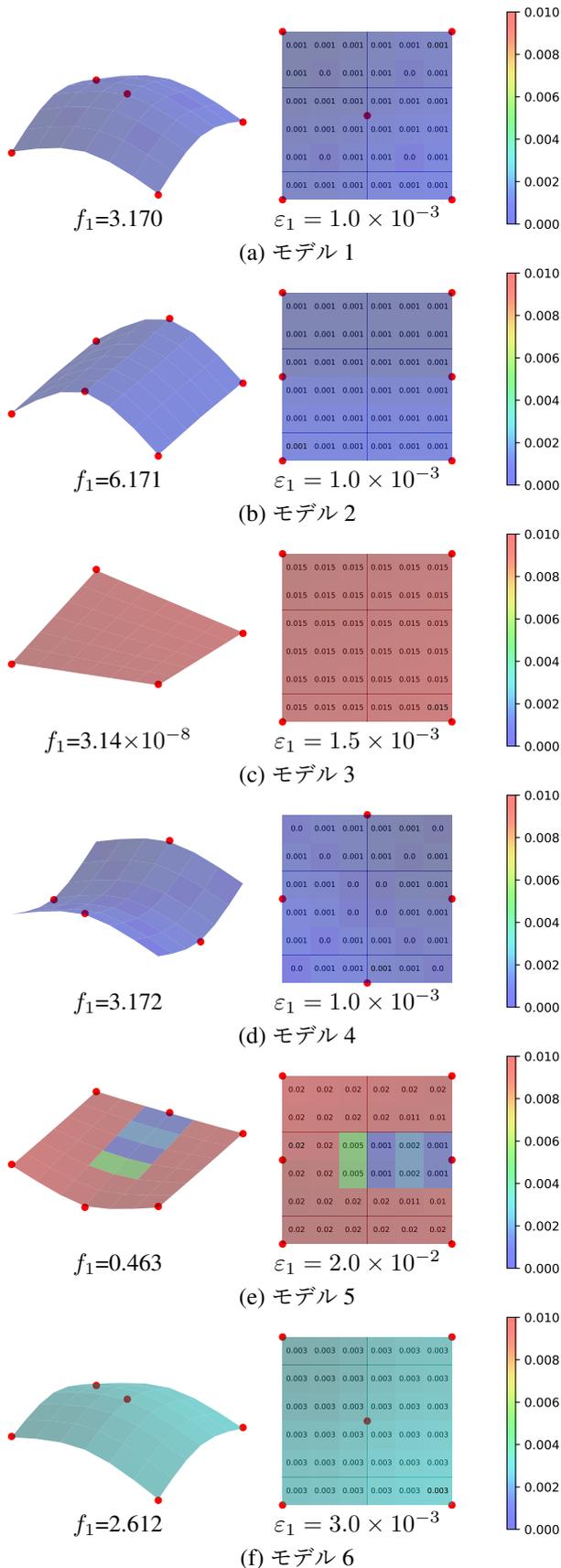


図6: 問題(16)の最適形状と  $e_f2$  分布

曲面や可展面は比較的平坦な四辺形面で充填しやすい事が解析的に確認できる。

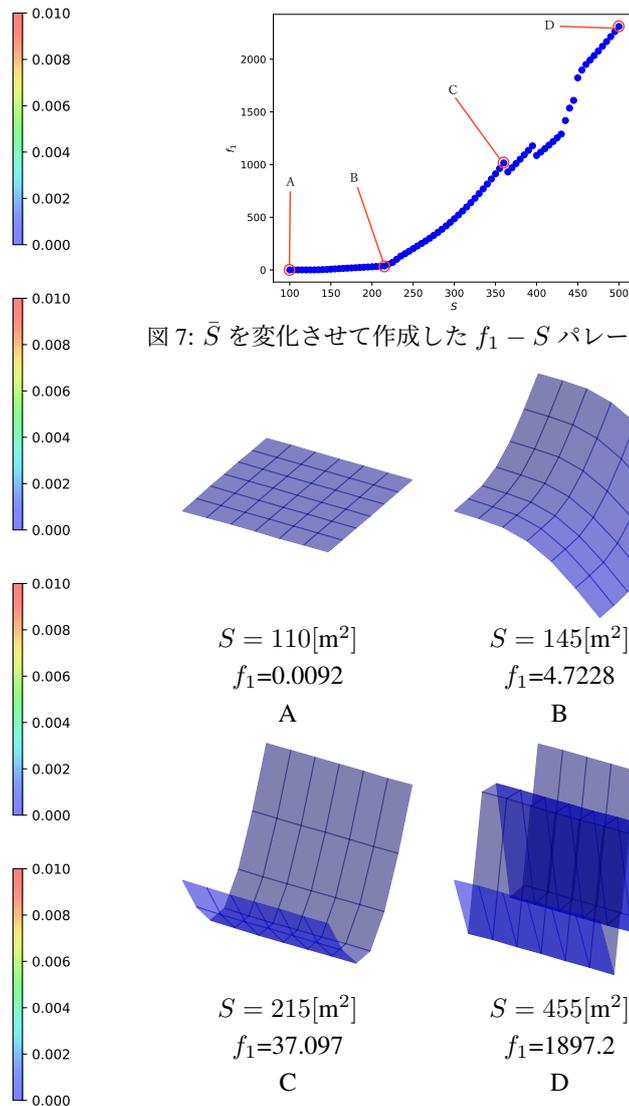


図7:  $\bar{S}$  を変化させて作成した  $f_1 - S$  パレートフロント

図8: 代表的な最適解

## 6. まとめ

$e_f2$  の数値はメッシュサイズにも依存するため、パネリングを細かくすれば1枚あたりの  $e_f2$  の数値は減少するが、その分施工手間は増えてしまう。本手法によれば、曲面のパネリングをする際に、施工的に許容可能な  $e_f2$  をまず定めて、その範囲内で本手法を適用することで、指定された格子グリッド数でのパネリングの可否を判断可能であると考えられる。

## 謝辞

本研究の一部はCREST JPMJCR1911の助成を受けたものである。ここに記して謝意を表する。

## 【参考文献】

- 1) S. Adriaenssens, P. Block, D. Veenendaal, and C. Williams. Shell structures for architecture: Form finding and optimization. *Routledge*, 2014.
- 2) 貞廣渉, 横須賀洋平, 本間俊雄. 離散曲面を用いたPQメッシュによる木質シェル構造の形状最適化. pp. 615-616, 2022.7.