

DC 計画問題として解くラチスシェルのトポロジー最適化

Topology Optimization of Latticed Shells Solved as DC Programming Problem

○奥蘭 尚人*¹, 藤田 慎之輔*²
Naoto OKUZONO*¹, Shinnosuke FUJITA*²

*1 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 大学院生

Graduate Student, Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu

*2 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 准教授

Assoc. Prof., Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu, Dr. Eng.

キーワード : DC 計画問題; DC アルゴリズム; トポロジー最適化; コンプライアンス

Keywords : DC programming problem; DC Algorithm; Topology optimization; Compliance

1. はじめに

近年, 骨組構造物の剛性最大化問題を混合整数 2 次錐計画問題 (MISOCP) として定式化することで, 現実的な時間内で大域的最適性を有した解を得る手法が考案され, 中規模の骨組に対して有効性が示されている^{1,2)}. しかし, MISOCP を解く際に用いられる解法は列挙法にもとづくため, 問題の規模が大きくなることで指数関数的に解析時間が増大し, 大規模な問題を MISOCP を用いて現実的な時間内で解くことは困難である. 本研究では既往の研究にて定式化されたコンプライアンス最小化問題をもとに, 大規模な最適化問題に対する解法として知られる DC アルゴリズム (DCA)³⁾ を用いる. DCA は非凸関数となりうる 2 つの凸関数の差分を最小化する DC 計画問題 (DCP) に対して, 局所最適解を得る手法として提案され, 各反復にて DCP を凸計画問題に近似することで, 効率的に解を求めることができる⁴⁾. 本研究では, MISOCP と DCP の違いを数値解析を通じて明らかにしつつ, コンプライアンス最小化問題に対する DCP の適用の有効性について検証を行う.

2. DC 計画問題の定式化

節点数 n , 部材数 m , 節点変位の自由度が D の 3 次元骨組構造の節点外力ベクトルを $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^D$ としたとき, コンプライアンス最小化を目的としたグラッドストラクチャ法⁵⁾ によるトポロジー最適化問題は $e = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r$ に対して式 (1) のように定式化することができる¹⁾. ただし, r 個の部材断面性能の組 $[\bar{a}_j, \bar{I}_{ze}, \bar{I}_{ye}, \bar{J}_j]$ ($j = 1, \dots, r$) が存在し, この中から任意に部材が選択できるものとする. 制約 (1c) における集合 $\mathbb{F}^m$ は, 設計変数である $a_e, I_{ze}, I_{ye}, J_e, t_{ej}$ ($e = 1, \dots, m; j = 1, \dots, r$) を

それぞれ各成分とする m 次または $m \times r$ 次の列ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{I}_z, \mathbf{I}_y, \mathbf{J}, \mathbf{t}$ を用いて定義される式 (2) を満たす集合である. また, E はヤング係数, G はせん断弾性係数, $a_e, I_{ze}, I_{ye}, J_e, l_e$ はそれぞれ, 部材の断面積, z 軸および y 軸周りの断面 2 次モーメント, ねじり定数, 部材長を表し, 添え字の e は部材番号を示し, 定ベクトル $\mathbf{b}_{el} \in \mathbb{R}^D$ と内力を表す設計変数 q_{el} を用いて節点外力ベクトルを表すことができる. $\bar{V}$ は体積の上限値であり, t_{ej} は部材の有無を表す 0-1 変数, w_{el} は最適解においてコンプライメンタリひずみエネルギーを表す.

$$\text{minimize} \quad f_M = \sum_{e=1}^m \sum_{l=1}^6 2w_{el} \quad (1a)$$

$$\text{subject to} \quad t_{ej} \in \{0, 1\}, \quad e = 1, \dots, m; j = 1, \dots, r \quad (1b)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{I}_z, \mathbf{I}_y, \mathbf{J}, \mathbf{t}) \in \mathbb{F}^m \quad (1c)$$

$$w_{e1} + a_e \geq \left\| \begin{pmatrix} w_{e1} - a_e \\ q_{e1} \sqrt{\frac{2I_e}{E}} \end{pmatrix} \right\|, \quad e = 1, \dots, m \quad (1d)$$

$$w_{e2} + J_e \geq \left\| \begin{pmatrix} w_{e2} - J_e \\ q_{e2} \sqrt{\frac{2I_e}{G}} \end{pmatrix} \right\|, \quad e = 1, \dots, m \quad (1e)$$

$$w_{e3} + I_{ze} \geq \left\| \begin{pmatrix} w_{e3} - I_{ze} \\ q_{e3} \sqrt{\frac{6I_e}{E}} \end{pmatrix} \right\|, \quad e = 1, \dots, m \quad (1f)$$

$$w_{e4} + I_{ze} \geq \left\| \begin{pmatrix} w_{e4} - I_{ze} \\ q_{e4} \sqrt{\frac{2I_e}{E}} \end{pmatrix} \right\|, \quad e = 1, \dots, m \quad (1g)$$

$$w_{e5} + I_{ye} \geq \left\| \begin{pmatrix} w_{e5} - I_{ye} \\ q_{e5} \sqrt{\frac{6I_e}{E}} \end{pmatrix} \right\|, \quad e = 1, \dots, m \quad (1h)$$

$$w_{e6} + I_{ye} \geq \left\| \begin{pmatrix} w_{e6} - I_{ye} \\ q_{e6} \sqrt{\frac{2I_e}{E}} \end{pmatrix} \right\|, \quad e = 1, \dots, m \quad (1i)$$

$$\mathbf{p} = \sum_{e=1}^m \sum_{l=1}^6 q_{el} \mathbf{b}_{el} \quad (1j)$$

$$a_e = \sum_{j=1}^r \bar{a}_j t_{ej}, \quad e = 1, \dots, m \quad (2a)$$

$$I_{ze} = \sum_{j=1}^r \bar{I}_{zj} t_{ej}, \quad e = 1, \dots, m \quad (2b)$$

$$I_{ye} = \sum_{j=1}^r \bar{I}_{yj} t_{ej}, \quad e = 1, \dots, m \quad (2c)$$

$$J_e = \sum_{j=1}^r \bar{J}_j t_{ej}, \quad e = 1, \dots, m \quad (2d)$$

$$\sum_{e=1}^m l_e a_e \leq \bar{V} \quad (2e)$$

$$\sum_{j=1}^r t_{ej} \leq 1, \quad e = 1, \dots, m \quad (2f)$$

ここで制約 (1b) は

$$0 \leq t_{ej} \leq 1, \quad e = 1, \dots, m; j = 1, \dots, r \quad (3a)$$

$$t_{ej}(1 - t_{ej}) \leq 0, \quad e = 1, \dots, m; j = 1, \dots, r \quad (3b)$$

と等価であり、式 (3) を制約 (1b) の代わりに制約として設けることで問題 (1) を連続最適化問題とすることができる。また、式 (3a) が成り立つとき、 $t_{ej}(1 - t_{ej}) \geq 0$ ($e = 1, \dots, m; j = 1, \dots, r$) が成り立つので、ペナルティパラメータとして十分大きな定数 ρ を用い、列ベクトル $\mathbf{t}$ 、各成分が全て 1 の $m \times r$ 次の列ベクトル $\mathbf{1}$ で表すことで、問題 (1) における目的関数は

$$f_M + \rho \mathbf{t}^\top (\mathbf{1} - \mathbf{t}) \quad (4)$$

と置き換えることができる。ここで、正の定数 λ を用いることで式 (4) は次のように DC 分解することができる。

$$\left(f_M + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{a}\|^2 \right) - \left(\frac{\lambda}{2} \|\mathbf{a}\|^2 + \rho \mathbf{t}^\top (\mathbf{1} - \mathbf{t}) \right) \quad (5)$$

よって、

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{t}) = \begin{cases} f_M + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{a}\|^2 & \text{if Eq. (3a) and Eq. (1c) to Eq. (1j) are satisfied} \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6a)$$

$$g(\mathbf{a}, \mathbf{t}) = \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{a}\|^2 + \rho \mathbf{t}^\top (\mathbf{1} - \mathbf{t}) \quad (6b)$$

とおけば、 f および g は凸関数であり、式 (5) は

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{t}) - g(\mathbf{a}, \mathbf{t}) \quad (7)$$

と書くことができ、問題 (1) の目的関数は凸関数の差分として表現することができる。

3. SOCP を用いた DC アルゴリズムの定式化

現在の反復で得られている点を $(\mathbf{a}_k, \mathbf{I}_{zk}, \mathbf{I}_{yk}, \mathbf{J}_k, \mathbf{t}_k)$ で表すと、DCA の次の反復点 $(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{I}_{z(k+1)}, \mathbf{I}_{y(k+1)}, \mathbf{J}_{k+1}, \mathbf{t}_{k+1})$ は問題 (1) における制約のもとで関数

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}, \mathbf{t}) - g'(\mathbf{a}, \mathbf{t}) &= f_M + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{a}\|^2 - \lambda \mathbf{a}_k^\top \mathbf{a} + \rho (\mathbf{1} - 2\mathbf{t}_k)^\top \mathbf{t} \\ &\quad - \left(\frac{\lambda}{2} \|\mathbf{a}_k\|^2 + \rho (\|\mathbf{t}_k\|^2 - \mathbf{1}^\top \mathbf{t}_k) - \lambda \|\mathbf{a}_k\|^2 - \rho (2\mathbf{t}_k - \mathbf{1})^\top \mathbf{t}_k \right) \end{aligned} \quad (8)$$

を最小化する点として定義される。

つまり、式 (8) を目的関数として問題 (1) を解き、その解を $(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{I}_{z(k+1)}, \mathbf{I}_{y(k+1)}, \mathbf{J}_{k+1}, \mathbf{t}_{k+1})$ とおけばよいことがわかる。ここで、補助変数 v を導入し、目的関数に定数を加えても最適解は変わらない点を考慮すると、次のような DCA 内で反復計算される最適化問題 (9) を導くことができる。

$$\text{minimize} \quad f_D = \sum_{e=1}^m \sum_{l=1}^6 2w_{el} + 2\lambda v + \rho (\mathbf{1} - 2\mathbf{t}_k)^\top \mathbf{t} \quad (9a)$$

$$\text{subject to} \quad \text{Eq.(1d) to Eq.(1i)}$$

$$v \geq \frac{1}{4} \|\mathbf{a} - \mathbf{a}_k\|^2 \quad (9b)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{I}_z, \mathbf{I}_y, \mathbf{J}, \mathbf{t}) \in \mathbb{F}^m \quad (9c)$$

$$0 \leq t_{ej} \leq 1, \quad e = 1, \dots, m; j = 1, \dots, r \quad (9d)$$

$$p = \sum_{e=1}^m \sum_{l=1}^6 q_{el} b_{el} \quad (9e)$$

また、制約 (9b) は 2 次錐制約として書き直すことができるため、最適化問題 (9) は 2 次錐計画問題である。

以上の定式化をもとに、次のアルゴリズムにしたがって最適化問題を解く。

Step 0: $k := 0$ とおき、初期解 $\mathbf{a}_0, \mathbf{I}_{z0}, \mathbf{I}_{y0}, \mathbf{J}_0, \mathbf{t}_0$ および最適化パラメータ $\rho > 0, \lambda > 0, \mu > 1, \epsilon > 0$ を選択する。

Step 1 問題 (9) を解き、その最適解を $(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{I}_{z(k+1)}, \mathbf{I}_{y(k+1)}, \mathbf{J}_{k+1}, \mathbf{t}_{k+1})$ とおく。

Step 2 **Step 1** で得られた最適解 $\mathbf{a}_{k+1}$ の e 番目の成分 a_e に対して $a_e \leq \epsilon$ ならば

$t_{ej} = 0$ ($j = 1, \dots, r$) と置換し、そうでなければ $\bar{a}_j$ ($j = 1, \dots, r$) の中から a_e と最も近い断面積になるように $a_e = \sum_{j=1}^r \bar{a}_j t_{ej}$ と $\sum_{j=1}^r t_{ej} \leq 1$ に注意し t_{ej} を 0 または 1 へ置換する。この操作を $\mathbf{a}_{k+1}$ の各成分に対して行う。

Step 3 Step 2 の操作により得られたトポロジーに対して弾性解析を行い、コンプライアンスに寄与しない不要な部材の断面積 a_e 及び 0-1 変数 t_{ej} ($j = 1, \dots, r$) を 0 とし、総体積を求める。

Step 4 Step 3 で求めた体積が体積上限値 $\bar{V}$ 以下ならば反復計算を終了する。そうでなければ $\rho := \mu\rho$ とおき $k \leftarrow k+1$ として、Step 1 へ。

4. 数値解析例

本章にて問題 (1) 及び問題 (9) をラチスシェルのトポロジー最適化に適用した数値解析例を示す。いずれの解析においても最適解にて用いられる部材は、STK 鋼管の $\bigcirc$ -216.3 $\times$ 4.5, $\bigcirc$ -216.3 $\times$ 5.8, $\bigcirc$ -216.3 $\times$ 7.0, $\bigcirc$ -216.3 $\times$ 8.2, $\bigcirc$ -216.3 $\times$ 12.7 の断面性能に対応したものの中から選択されるものとする。また、それに伴いヤング係数及びポアソン比は、それぞれ $E = 205[\text{GPa}]$, $\nu = 0.3$ とし全部材で一定とする。体積上限値は (a) $\bar{V} = 2.5[\text{m}^3]$, (b) $\bar{V} = 3.0[\text{m}^3]$ の 2 つのケースを考え、対称性を考慮することで設計変数の数を減らし、1/4 領域について解析を行う。DCA 内で用いるパラメータに関して、全ての解析において $\rho = 1.0 \times 10^{-5}$, $\mu = 5.0$, $\epsilon = 1.0 \times 10^{-6}$ に設定し、DC 分解に伴うパラメータ λ は 1, 50, 100 の 3 パターンで解析を行う。初期解は、 t_{ej} を全て 1 とし、それに伴い $\mathbf{a}_0$ の各成分を $\sum_{j=1}^r \bar{a}_j$ とする。

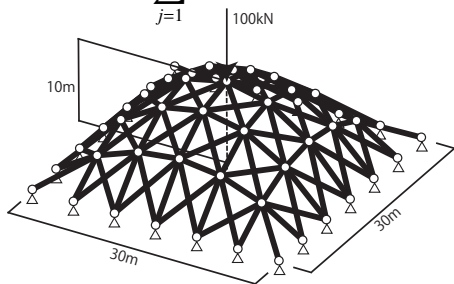


図 1: 7 $\times$ 7 Latticed shell ground structure

図 1 のグラウンドストラクチャを考える。MISOCP と DCP の 2 つの解法にて最適化を行うことで得られた最適解を図 2, 図 3 に示す。なお、表 1 中における λ の値は、1, 50, 100 に変化させ、最もコンプライアンス値を最小とすることができたものを示す。図 2 から、中心部分に大きな断面積を有する部材が密集していることが確認できる。さらに、中心から四隅の支点を結ぶように部材が優先的に配置されているため、主に対角線上の部材を通じて支点到に力を伝達することがコンプライアンス最小化に大きく寄与していると考えられる。

続いて、DCP である問題 (9) を解くことにより得られた図 3 について考察を行う。各最適トポロジーをみると、MISOCP を解くことにより得られた最適トポロジーが斜めの部材を通じて力を伝達していることにに対し、DCP を解くことにより得られた最適トポロジーでは、主に上下左右方向に力が伝達するようなトポロジーが得られている。一方で、中心部分に大きな断面積を有する部材が密集しているといった特徴は同様に確認することができる。このように、力の伝達方法が大きく異なることに付随して、DCP から得られた最適トポロジーにおけるコンプライアンス値 f_D は、MISOCP から得られた最適トポロジーにおけるコンプライアンス値 f_M と比較して、全ての体積上限値において増大していることがわかる。このことから、DCP では得られた最適解に対して数学的な大域的最適性は保証されていないといえる。

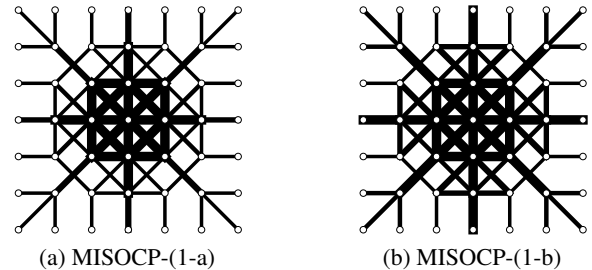
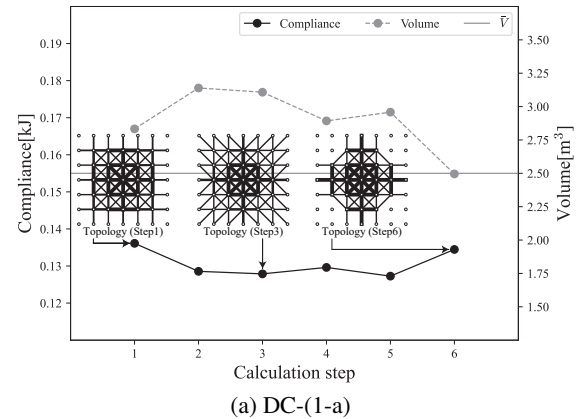
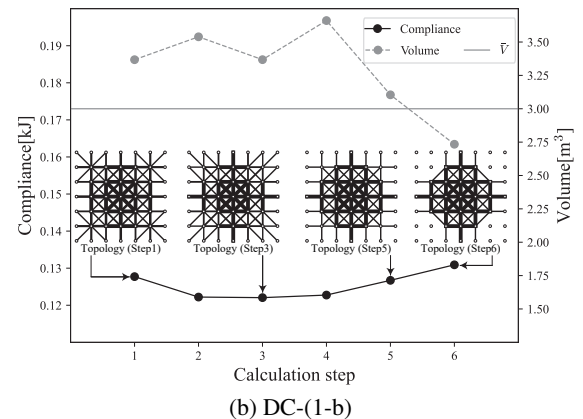


図 2: MISOCP を解くことで得られた大域的最適解



(a) DC-(1-a)



(b) DC-(1-b)

図 3: DCP を解くことで得られた局所最適解

表 1: 各最適化結果概要

	λ	$\bar{V}[\text{m}^3]$	$V[\text{m}^3]$	time[s]	f_M or f_D	f_D/f_M
MISOCP-a	-	2.5	2.500	5357	0.1316	1.022
DC-a	100	2.5	2.496	0.46	0.1345	
MISOCP-b	-	3.0	2.996	219.5	0.1208	1.084
DC-b	50	3.0	2.734	0.46	0.1309	

次に、各ステップごとの結果を示す図 3 に対して考察を行う。図 3 より、各反復計算におけるコンプライアンス値や体積の変動に一定の増減関係は無い一方で、いずれも初期解と比較すると最適化計算終了時のコンプライアンス値は増大し、体積は減少していることが確認できる。これは初期解では DCA における **Step3** にて計算される体積が体積上限値を大きく上回っているのに対し、反復計算ごとに 0-1 変数 t_{ej} に対するペナルティが ρ の値が大きくなることで強まっており、最終的に **Step 3** にて計算後の体積が体積上限値以下となっており、体積とコンプライアンス値がトレード・オフの関係にあることから、このような変動がみられたといえる。また、体積の減少に対応して全体的に部材が減っていることがわかる。さらに、DCP にてコンプライアンス最小化問題を解く際に、本研究にて提案した DCA にもとづく各反復計算においては、図 3 に示す各ステップにおける最適トポロジーからもわかる通り、一度消失した部材は再度最適トポロジーにて用いられないという法則がある。このことから、DCP により得られる最適トポロジーは MISOCP により得られる最適トポロジーと比較して、部材数が少ないことが多いと考えられる。実際に、図 2 から最適トポロジーにて用いられている節点数は MISOCP により得られた最適トポロジーと DCP により得られた最適トポロジーを比較すると大きく異なっており、後者の方が少なく、最適トポロジーにて用いられている部材数も少ないことがわかる。よって、DCA 内における最適トポロジーへの置換操作にて必要となる ϵ は $\min(\bar{a}_j)$ ($j = 1, \dots, r$) に対して十分に小さな値に設定しないと、より多くの部材が消失してしまう傾向となり大域的最適解におけるコンプライアンス値を大きく上回るコンプライアンス値を有するトポロジーが得られる恐れがある。また、1 反復の解析時間は、いずれも 1 秒以下となった。これは MISOCP では離散変数である 0-1 変数 t_{ej} を DCP では連続変数として扱うことで、最適化計算に分枝カット法を用いることなく解を求めることができるため、解析時間を大幅に短縮できたと考えられる。

5. 結論

本研究では、建築分野における研究事例が少ない DCP を構造物のコンプライアンス最小化問題へ適用可能であることを、既往の研究にて定式化された MISOCP による解法にて得られる大域的最適解と DCP による解法にて得られる局所最適解の比較実験を行うことで示した。DCP を解くことで得られた解はいずれも大域的最適解と大きく乖離せず、高速に獲得できたため、より大規模な問題への適用の可能性も期待される。

しかし本研究にて取り扱ったコンプライアンス最小化問題では、 λ の値によれば DCP にて適切に解を得ることができない場合も生じた。さらに初期解が変わることでもまた新たに λ の値について検討していく必要性が考えられる。このことについては、実際に田中らの報告にある通り、DCP により得られる解が必ずしも大域的最適解に近い解とならず、解の精度が λ の値や初期解に大きく依存するためである⁶⁾。さらに、初期解の選び方について決定的な方法は存在せず、同報告では大域的最適解に近い点を初期解に設定した場合、少ない反復回数で大域的最適解に収束することが期待できるともいわれている。また、DCP にて解析に要する時間は、MISOCP と比較すると格段に短くなっているため最適な λ の探索にそれほど時間は要さないものの、問題の規模が大きくなるほどコンパイルにかかる時間が増加することも今後の課題として考えられる。

[参考文献]

- 1) 藤田慎之輔, 寒野善博: 混合整数 2 次錐計画法による 3 次元骨組構造物のトポロジー最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 82, No. 732, pp. 193–201, 2017. 2
- 2) Y. Kanno: Mixed-integer second-order cone programming for global optimization of compliance of frame structure with discrete design variables, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 54, pp. 301–316, 2016
- 3) T. Pham Dinh and H. A. Le Thi: Recent advances in DC programming and DCA, *Transactions on Computational Intelligence XIII*, Vol. 8342, pp. 1–37, 2013
- 4) Y. S. Niu and T. Pham Dinh: A DC programming approach for mixed-integer linear programs, *Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences*, pp. 244–253, 2008. 9
- 5) 藤井大地, 真鍋匡利, 高田豊文: グランドストラクチャ法による建築構造の形態創生, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 73, No. 633, pp. 1967–1973, 2008. 11
- 6) 田中未来, 奥野貴之: DC 最適化の理論と応用, 日本応用数理学会, Vol. 29, No. 3, pp. 14–23, 2019. 9