

# 組積造アーチの最適化と載荷実験

## Optimization and load testing of masonry arch structures

藤田 慎之輔\*<sup>1</sup>  
Shinnosuke Fujita\*<sup>1</sup>

\*<sup>1</sup> 北九州市立大学大学院 国際環境工学研究科 准教授

Assoc. Prof., Graduate School of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu, Dr. Eng.

**キーワード** : 組積造; Graphic Statics; Thrust Line Analysis; 形状最適化; 断面最適化

**Keywords** : Masonry; Graphic Statics; Thrust Line Analysis; Shape optimization; Section optimization

### 1. はじめに

近年、デジタルファブリケーション技術の発展により、KUKAなどのロボットアームや産業用ドローンを用いて組積造建築を自動で組み上げる研究も試みられているが<sup>1,2)</sup>、それらの試みにより実現された構築物は殆ど引張抵抗できない構造であるため、地震に対して抵抗することは難しい。他方、Philippe BlockらによってThrust Network Analysis<sup>3)</sup>が提案されて以降、図法力学(Graphic Statics)が注目を浴びており、東京大学でも2022年度に建築学科の授業コンテンツとして取り入れられている<sup>4)</sup>。Sigridらは、一連の図法力学の手法の1つであるThrust Line Analysisを用いて地震力に対しても引張を生じないアーチの形態を獲得している<sup>5)</sup>。既往の研究では、スラストラインを断面の内側に納める条件式を最適化問題の制約関数として組み込むことで、外力に対して圧縮力のみで抵抗可能で、かつ高い剛性を有する組積造アーチの創生が可能であることが確かめられている<sup>6)</sup>。本研究では、同種の方法によって圧縮のみで外力に抵抗する組積造アーチを創生するとともに、デジタルファブリケーションによって得られた形態を実際に制作し、載荷試験を行い、手法の有効性を実験的に検証する。

### 2. スプライン関数を用いて記述する梁要素アーチモデル

組積造を解析的に正確にモデル化するためには、接触問題を扱わなければならない。要素同士のめり込み剛性に応じた圧縮ばねを設ける必要があり、モデル化は極めて煩雑かつ収斂計算が必要となるため、最適化問題で扱うモデルとしては現実的ではない。そこで本研究では、解析モデルは $n$ 個の節点と $m(=n-1)$ 個の矩形断面の梁要素に離散化された2次元アーチを扱うものとし、後述するような圧縮のみで応力伝達を行う制約を付加することで要素同士の離間を制御する。

梁要素の各節点の $x$ 座標と $y$ 座標を並べたベクトルを

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \quad (1a)$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top \quad (1b)$$

と定義する。アーチ形状は、 $s+1$ 個の制御点の $x$ 座標と $y$ 座標を並べたベクトルを

$$\mathbf{q}_x = (q_{x0}, \dots, q_{xs})^\top \quad (2a)$$

$$\mathbf{q}_y = (q_{y0}, \dots, q_{ys})^\top \quad (2b)$$

とし、これらを用いて $N$ 次のBスプライン基底関数 $B_{i,N}(i=0, \dots, s)$ とパラメータ $u_j \in \{0, 1\} (j=1, \dots, n)$ により次のように離散化する。

$$x_j = \sum_{i=0}^s q_{xi} B_{i,N}(u_j), \quad (j=1, \dots, n) \quad (3a)$$

$$y_j = \sum_{i=0}^s q_{yi} B_{i,N}(u_j), \quad (j=1, \dots, n) \quad (3b)$$

各矩形要素の断面形状については、2次元アーチであるので奥行きは $b$ で一定とし、断面幅のみを最適化の対象とする。各節点位置における断面幅を並べたベクトルを

$$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_s)^\top \quad (4)$$

とし、断面幅に関する制御点座標

$$\mathbf{q}_t = (q_{t0}, \dots, q_{ts})^\top \quad (5)$$

により、節点座標と同様に離散化する。

$$t_j = \sum_{i=0}^s q_{ti} B_{i,N}(u_j), \quad (j=1, \dots, n) \quad (6)$$

ただし、梁要素の断面幅は要素ごとに定義されるので、本研究では要素 $i$ の断面幅 $\hat{t}_i$ は、両端の節点位置での値 $t_i^1$ と $t_i^2$ の平均値とする。

$$\hat{t}_i = \frac{t_i^1 + t_i^2}{2}, \quad (i=1, \dots, m) \quad (7)$$

### 3. 圧縮による応力伝達の条件

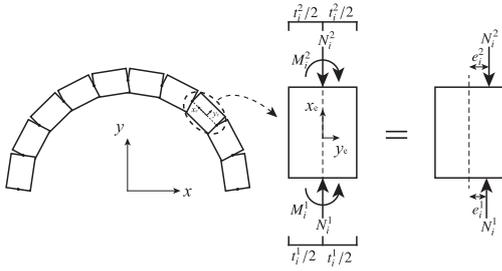


図1 梁断面の重心における断面力と等価偏心圧縮力

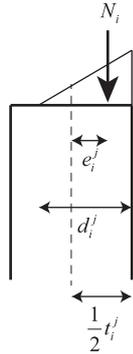


図2  $e_i^j > t_i^j/6$  の場合の圧縮応力分布

$i$  番目の梁要素に作用する断面力のうち、要素両端の曲げモーメントを  $M_i^j (j = 1, 2)$ 、軸力を  $N_i^j (j = 1, 2)$  とすると、当該断面力は断面中心から距離  $e_i^j$  偏心した位置に  $N_i^j$  の軸力が作用した状態と等価であり(図1)、軸力と曲げモーメントは次式で関係づけられる。

$$M_i^j = N_i^j e_i^j, \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, 2) \quad (8)$$

弾性解析により得られた  $M_i^j$ 、 $N_i^j$  から求まる偏心距離  $e_i^j$  は、引張応力が発生しないアーチの場合は  $e_i^j > t_i^j/6$  の範囲では図2のような応力状態となり、次式が成立する。

$$e_i^j = \frac{1}{2} t_i^j - \frac{1}{3} d_i^j, \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, 2) \quad (9)$$

ここで  $d_i^j$  は圧縮される断面の幅を表す。式(9)から、 $t_i^j/3 < e_i^j$  で要素の半分以上が分離し、 $e_i^j$  が  $t_i^j/2$  を超えると圧縮場が完全に消失することが分かる。 $\bar{e}_i^j$  を  $e_i^j$  の絶対値の上限とすると、式(1)より梁要素の断面力は

$$-\bar{e}_i^j \leq \frac{M_i^j}{N_i^j} \leq \bar{e}_i^j, \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, 2) \quad (10)$$

となり、断面力の値によって圧縮場を任意に制御できることが分かる。なお、本研究では、少なくとも断面の半分が圧縮状態になるように、 $\bar{e}_i^j = t_i^j/3$  と設定して形態創生を行うこととした。

### 4. 最適化問題の定式化とポスト処理

本研究では、自重、集中荷重、地震時水平力を同時に受ける2次元アーチを考える。全体の外力ベクトルは次のように整理しておく。

$$\mathbf{F}_{\pm} = \mathbf{F}^s + \lambda \mathbf{F}^c \pm K \mathbf{F}^e \quad (11)$$

ここで  $\mathbf{F}^s$  は自重による等価節点力ベクトル、 $\mathbf{F}^c$  は集中荷重ベクトル、 $\mathbf{F}^e$  は地震時水平力ベクトルである。 $\mathbf{F}^c$  は荷重係数  $\lambda$  によって漸増させるものとする。 $\mathbf{F}^e$  は  $\mathbf{F}^s$  の鉛直下向き成分を水平力に置き換えたベクトルとし、水平震度  $K$  を乗じることで大きさを変化させる。

外力  $\mathbf{F}_{\pm}$  を受ける2次元アーチに対して次のような最適化問題を考える。

$$\underset{\mathbf{X}}{\text{minimize}} \quad f(\mathbf{X}) = E_+(\mathbf{X}) + E_-(\mathbf{X}) \quad (12a)$$

$$\text{subject to} \quad V(\mathbf{X}) \leq \bar{V}^U \quad (12b)$$

$$-\bar{e}_i^j \leq \frac{M_{Vi}^j(\mathbf{X}) \pm M_{Hi}^j(\mathbf{X})}{N_{Vi}^j(\mathbf{X}) \pm N_{Hi}^j(\mathbf{X})} \leq \bar{e}_i^j \quad (12c)$$

$(i = 1, \dots, m; j = 1, 2)$

$$\bar{t}^k \leq t_k(\mathbf{X}) \leq \bar{t}^U, \quad (k = 1, \dots, n) \quad (12d)$$

ここで、 $E_+$  は自重 + 集中荷重に加えて地震時水平力を正方向に加力した時(つまり  $\mathbf{F}_+$  作用時)のひずみエネルギー値、 $E_-$  は自重 + 集中荷重に加えて地震時水平力を負方向に加力した時(つまり  $\mathbf{F}_-$  作用時)のひずみエネルギー値である。 $N_{Vi}^j$ 、 $M_{Vi}^j$  は  $\mathbf{F}^s + \lambda \mathbf{F}^c$  作用時の断面力、 $N_{Hi}^j$ 、 $M_{Hi}^j$  は  $K \mathbf{F}^e$  作用時の断面力である。 $\bar{V}^U$  は構造物全体の体積の上限値、 $\bar{t}^k$ 、 $\bar{t}^U$  は断面幅の上下限值である。設計変数  $\mathbf{X}$  は以下の3パターンを考える：

$$\mathbf{X} = \begin{cases} \mathbf{q}_z^* & \dots \text{形状最適化} \\ \mathbf{q}_t^* & \dots \text{断面最適化} \\ (\mathbf{q}_z^{*\top}, \mathbf{q}_t^{*\top})^\top & \dots \text{形状・断面同時最適化} \end{cases}$$

ここで、 $\mathbf{q}_z^*$  は  $\mathbf{q}_z$  のうち 1/2 領域部分の座標から境界条件部分を除いたベクトル、 $\mathbf{q}_t^*$  は  $\mathbf{q}_t$  のうち 1/2 領域部分の座標を集めたベクトルとし、形状および断面幅分布は 1/2 対称性を考慮して生成されるものとする。

しかしながら、有限要素解析法では要素同士の部分的な離間を考慮していない。 $e_i^j > t_i^j/6$  の範囲では圧縮域が断面幅よりも小さいため、実際には剛性に寄与する見かけの断面二次モーメントや断面積は小さくなるが、最適化問題(12)で得られたひずみエネルギーはその点が考慮されておらず、正確な数値ではない。最適化計算の中でそのような分離現象を逐次考慮することは計算コスト

の観点からは現実的ではないため、本研究では問題 (12) を解いて得られた最適解に後処理を施すことでこの現象を考慮する。

$e_i^j > t_i^j/6$  において、軸力による圧縮応力を  $\sigma_{0i}^j$  とすると、

$$N_i^j = bt_i^j\sigma_{0i}^j, \quad M_i^j = be_i^jt_i^j\sigma_{0i}^j \quad (13)$$

と書けるので、要素  $i$  の両端の曲率は次式であらわされる。

$$\kappa_i^j = \frac{M_i^j}{E\hat{I}_i} = \frac{be_i^jt_i^j\sigma_{0i}^j}{Eb(t_i^j)^3/12} = \frac{12e_i^j\sigma_{0i}^j}{E(t_i^j)^2} \quad (14)$$

ここで  $E$  はヤング係数、 $\hat{I}_i$  は見かけの断面二次モーメントである。離間を考慮した縁部の応力は次式で計算される。

$$\sigma_i^{j*} = d_i^j\kappa_i^jE = 3\left(\frac{1}{2}t_i^j - e_i^j\right)\frac{12e_i^j\sigma_{0i}^j}{(t_i^j)^2} \quad (15)$$

軸力の大きさは離間前後で維持されるものとすれば、 $\sigma_{0i}^j$  は変化しないので、離間後の軸力は次式で表される。

$$\begin{aligned} N_i^{j*} &= \frac{b}{2}\sigma_i^{j*}d_i^j = \frac{1}{2}\left\{3\left(\frac{1}{2}t_i^j - e_i^j\right)\right\}^2\frac{12be_i^j\sigma_{0i}^j}{(t_i^j)^2} \\ &= \frac{1}{2}\left\{3\left(\frac{1}{2}t_i^j - e_i^j\right)\right\}^2\frac{12e_i^j}{(t_i^j)^3}bt_i^j\sigma_{0i}^j = \beta_i^jN_i \end{aligned} \quad (16)$$

ここで

$$\beta_i^j = \frac{1}{2}\left\{3\left(\frac{1}{2}\hat{t}_i - e_i^j\right)\right\}^2\frac{12e_i^j}{(\hat{t}_i)^3} \quad (17)$$

を更新率と呼ぶ

離間後の曲げモーメントも更新率  $\beta_i^j$  を用いて  $M_i^{j*} = e_i^jN_i^{j*} = b_i^jM_i^j$  として計算される。断面積および断面二次モーメントもそれぞれ  $\hat{A}_i \rightarrow \beta_i^jA_i$ ,  $\hat{I}_i \rightarrow \beta_i^jI_i$  と更新される。更新率は要素両端で異なるが、そのうち大なる値を採用するものとし、地震力の正負の加力方向の平均値をとるものとする。

$$\begin{aligned} \beta_i &= (\beta_i^+ + \beta_i^-)/2 \\ \beta_i^+ &= \max(\beta_i^{1+}, \beta_i^{2+}), \quad \beta_i^- = \max(\beta_i^{1-}, \beta_i^{2-}) \end{aligned} \quad (18)$$

断面力及び断面性能の更新は、更新前後のひずみエネルギーの差が十分小さな値  $\varepsilon$  以下となるか、指定更新回数  $c$  に達した時点で終了とする。

以上の手順をまとめると次のようになる。

**Step 0** 初期形状、体積上限値  $\bar{V}^U$ 、断面幅上下限值  $\hat{t}^L, \hat{t}^U$  を与え、収束判定値  $\varepsilon$ 、最大計算回数  $c$  を設定する。 $f_0 := f$ ,  $k := 1$  とおく。

**Step 1** 最適化問題 (12) を解く。

**Step 2** 得られた断面力及び断面性能を更新率  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) により更新し、ひずみエネルギー  $f$  も更新する。

**Step 3**  $f_k := f$  とする。 $k = c$  もしくは  $|f_k - f_{k-1}| \leq \varepsilon$  となれば計算終了。そうでなければ  $k \leftarrow k + 1$  として **Step 1** へ戻る。

## 5. 数値解析例

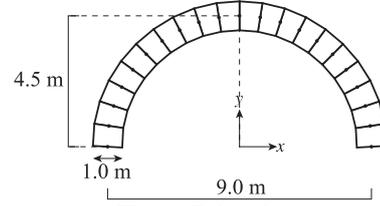


図3 解析モデル

図3に示すような半径4.5mの半円アーチで構成される組積造を考える ( $n = 21, m = 20$ )。境界条件は両端固定支持とし、初期断面幅は一律に  $t_i = 1.0\text{m}$ 、奥行き  $b = 1.0\text{m}$  とする。コンクリートを想定し、ヤング係数  $E = 21\text{GPa}$ 、単位体積重量は  $24\text{kN/m}^3$  とし、 $F^c$  としてスパン中央の節点のみに鉛直下向きに  $1\text{kN}$  を作用させる。弾性解析は OpenSees により行う。 $K$  及び  $\lambda$  の値を様々に変えて、形状最適化、断面最適化、形状・断面同時最適化を行った結果を図4に示す。 $\bar{V}^U$  は初期形状における  $V$  とし、 $\hat{t}^L = 0.2\text{m}$ 、 $\hat{t}^U = 2.0\text{m}$  とした。各図において、軸力の作用位置を結んだ線を赤線で示している。これは既往研究におけるスラストラインに相当するものであり、当該線が断面外に存在する場合、要素同士は完全離間し崩壊することとなる。

最適化結果から、から水平震度  $K = 0.1$ 、集中荷重係数  $\lambda = 100.0$ 、水平震度  $K = 0.3$ 、集中荷重係数  $\lambda = 0.0, 10.0, 100.0$  の初期形状ではスラストラインが枠内に収まっておらず崩壊するが、それぞれの最適化を行うことによりスラストラインは断面内に収束し剛性が向上していることが確認できる。荷重が大きくなると形状最適解ではアーチ端部の梁要素が外側に開き、断面最適解ではアーチ端部の梁要素の断面幅が大きく、アーチ中央部の梁要素の断面幅が小さくなっていることが分かった。また、荷重、水平震度の条件が同じ場合は初期形状、形状最適解、断面最適解、同時最適解の順で目的関数であるひずみエネルギー  $f$  を小さく抑えられることもわかった。しかし、 $\lambda=100.0$  の場合では断面最適化は実行不可能となったことから、外力に対してスラストラインを断面内に制御するには、断面を操作するよりも形状を操作する方が効果的であることが示唆される。

## 6. shopbot を用いた载荷試験

本節では、shopbot を用いて木板から組積パーツを作成し、初期解と最適解の差異を比較するための実験を

$\lambda = 0.0$	$K = 0.0$	$K = 0.3$
初期形状	$f = 0.0116\text{kNm}$	$f = 0.0180\text{kNm}$
形状最適解	$f = 0.0073\text{kNm}$	$f = 0.0099\text{kNm}$
断面最適解	$f = 0.0017\text{kNm}$	$f = 0.0091\text{kNm}$
同時最適解	$f = 0.0011\text{kNm}$	$f = 0.0020\text{kNm}$

$\lambda = 10.0$	$K = 0.0$	$K = 0.3$
初期形状	$f = 0.0134\text{kNm}$	$f = 0.0198\text{kNm}$
形状最適解	$f = 0.0082\text{kNm}$	$f = 0.0107\text{kNm}$
断面最適化	$f = 0.0051\text{kNm}$	$f = 0.0067\text{kNm}$
同時最適解	$f = 0.0026\text{kNm}$	$f = 0.0038\text{kNm}$

$\lambda = 100.0$	$K = 0.0$	$K = 0.3$
初期形状	$f = 0.0444\text{kNm}$	$f = 0.0508\text{kNm}$
形状最適解	$f = 0.0216\text{kNm}$	$f = 0.0263\text{kNm}$
断面最適解	実行不可	実行不可
同時最適解	$f = 0.0170\text{kNm}$	$f = 0.0212\text{kNm}$

図4  $K, \lambda$  の別による RC 組積造の最適形状の違い

行う。図3の解析モデルを0.054倍に縮小し、載荷試験が可能なスパンに調整した。また、材料物性値をコンクリート ( $E = 21\text{GPa}$ ,  $\rho = 24\text{kN/m}^3$ ) からスギ ( $E = 7\text{GPa}$ ,  $\rho = 5\text{kN/m}^3$ ) に変更し、 $K = 0.0$ ,  $\lambda = 0.01$  として形状・断面同時最適化を行った。

図5に示す解析結果より、集中荷重  $0.01\text{kN}$  ( $=1000\text{g}$ ) を負荷すると初期形状は崩壊し、一方最適化形状では荷重

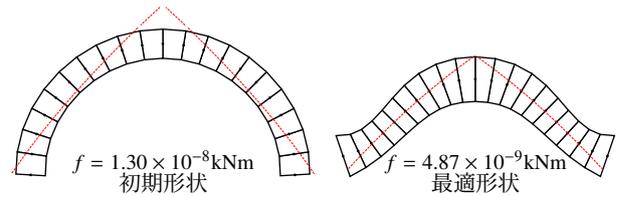


図5 木質組積造の最適化結果 ( $K = 0.0$ ,  $\lambda = 0.01$ )

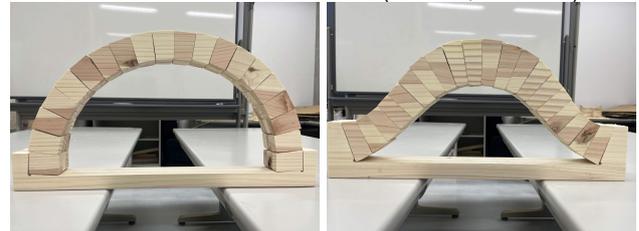


図6 shopbot で作成した試験体

に耐えることが可能であることになる。

そのことを実験で確かめるため、図6のように初期形状最適形状それぞれについて試験体を作成し、載荷試験を実施したところ、初期形状は集中荷重  $210\text{g} \sim 220\text{g}$  での負荷で崩壊、最適化形状は集中荷重  $4000\text{g}$  までの負荷に耐えこれを上限値として終了した。初期形状と最適化形状では解析結果と同様に耐荷重の大きさには大きな差が生まれることが分かった。解析値よりも大きな荷重に耐えることになったが、これは解析では考慮していない要素間の摩擦力の影響が考えられる。

## 7. 結論

本研究では、圧縮のみで自立する組積造のアーチの形態創生手法を提案した。円弧アーチでは抵抗できない外力に対しても、形状や断面を最適化することで純圧縮抵抗することが可能であることが解析と実験の双方で確かめられた。

## 謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 22KK0065 の助成を受けたものである。ここに記して謝意を表する。

## 【参考文献】

- 1) F. Gramazio and M. Kohler. *Digital Materiality in Architecture*. Lars Muller, 2008.
- 2) F. Gramazio, M. Kohler, and R. D' Andrea. *Flight Assembled Architecture*. Editions HXX, 2012.
- 3) P. Block and J. Ochsendorf. Thrust network analysis: A new methodology for three-dimensional equilibrium. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol. 48, No. 3, pp. 167–173, 2007.
- 4) 三木優彰. 東京大学において試行された図法力学の授業について. コロキウム構造形態の解析と創生 2022, 2022.10.
- 5) S. Adriaenssens and T. Michiels. Form-finding algorithm for masonry arches subjected to in-plane earthquake loading. *Computers and Structures*, Vol. 195, No. 1, pp. 85–98, 2018.1.
- 6) T. Kimura, M. Ohsaki, S. Fujita, T. Michiels, and S. Adriaenssens. Shape optimization of no-tension arches subjected to in-plane loading. *Structures*, Vol. 28, pp. 158–169, 2020.12.